Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. М. КАЧАНОВ

К ЗАДАЧЕ О ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИЧНОГО СЛОЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 15 III 1954)

§ 1. Задача о сжатии (растяжении) пластичного слоя, имеющая важные приложения, была предметом многих теоретических (из которых назовем работы по плоской задаче ([1-3])) и экспериментальных исследований. В приложениях широко используется приближенное решение осесимметричной задачи с теми или иными небольшими изменениями (см., например, ([4,5])). В упомянутых решениях касательные напряжения на поверхности слоя считаются постоянными ([1-3]) или связанными законом Кулона с нормальным давлением ([4,5]). В связи с этим возникали трудности интерпретации полученных решений в начальной стадии развития пластических деформаций. Укажем, в частности, на два важных вопроса: изучение напряженного состояния в пластичном спае и развитие разработанного недавно А. Л. Немчинским метода определения сопротивления отрыву у пластичных металлов посредством испытания на растяжение тонкого слоя из испытуемого металла, сплавленного с прочными частями. Здесь следует рассматривать смешанные краевые условия, задавая на поверхности контакта смещения.

Настоящая работа посвящена осесимметричной задаче этого типа.

§ 2. Рассмотрим образец, состоящий из двух прочных цилиндрических частей (диаметр $2a$), соединенных между собой круглым диском (диаметр $2a$, толщина $2h$) из испытуемого металла. При этом $\varkappa = h/a \ll 1$. Так как различие в коэффициентах упругости обоих материалов невелико (для сталей), то в дальнейшем принимается их равенство. Тогда при растяжении в пределах упругости образец находится в состоянии равномерного одноосного растяжения. При достижении предела текучести материала диска последний сразу и полностью переходит в пластическое состояние. С развитием пластических деформаций напряженное состояние диска все более отклоняется от равномерного растяжения и приобретает сложный пространственный характер.

Введем цилиндрические координаты $\rho = r/a$, φ, $\zeta = z/a$, причем z отсчитывается от срединной плоскости диска. Касательные напряжения $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$.

Для безразмерных напряжений $\sigma_r \sim \sigma_r/\sigma_s$, $\sigma_\varphi \sim \sigma_\varphi/\sigma_s$, $\sigma_z \sim \sigma_z/\sigma_s$, $\tau \sim \tau_{rz}/\tau_s$, где σ_s — предел текучести при растяжении ($\sigma_s = \sqrt{3}\,\tau_s$), дифференциальные уравнения равновесия и условие пластичности Мизеса имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{\rho} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \rho} + \frac{\tau}{\rho} + \sqrt{3}\,\frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} = 0; \tag{2}$$

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 2\tau^2 = 2. \tag{3}$$

На боковой поверхности диска, свободной от напряжений, должны выполняться краевые условия

$$\sigma_r \big|_{\rho=1} = 0; \tag{4}$$

$$\tau \big|_{\rho=1} = 0. \tag{5}$$

Сумма напряжений σ_z равна растягивающей силе P, т. е.

$$2\int_0^1 \sigma_z \rho \, d\rho = p \quad \left(p = \frac{P}{\pi a^2 \sigma_s}\right). \tag{6}$$

Относительное изменение объема ε и среднее давление σ связаны законом Гука (k — коэффициент объемного сжатия) $\varepsilon = 3k\sigma$. Вводя безразмерные смещения $u \sim u/u_0$, $w \sim w/u_0$, где $u_0 = \nu \frac{\sigma_s}{E} a$ (ν—число Пуассона, E — модуль Юнга), приведем последнее уравнение к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \bar{k}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z) \quad \left(\bar{k} = \frac{1-2\nu}{\nu}\right). \tag{7}$$

Остальные соотношения теории упруго-пластических деформаций запишем в форме

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho}}{\sigma_r - \sigma_\varphi} = \frac{\frac{u}{\rho} - \frac{\partial w}{\partial \zeta}}{\sigma_\varphi - \sigma_z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{\partial u}{\partial \rho}}{\sigma_z - \sigma_r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho}}{\tau}. \tag{8}$$

Смещения u, w должны удовлетворять краевым условиям при $\zeta = \pm \varkappa$:

$$u = -p\rho; \tag{9}$$

$$w = \pm c, \tag{10}$$

где параметр c определяется уравнением статической эквивалентности (6).

Ищем решение, вследствие малости ζ, в форме

$$\tau = R(\rho) \frac{\zeta}{\varkappa}, \tag{11}$$

где $R(\rho)$ — неизвестная функция. Тогда из (2) получаем

$$\sigma_z = -\frac{1}{2\sqrt{3}\varkappa}\left(\frac{dR}{d\rho} + \frac{R}{\rho}\right)\zeta^2 + S(\rho), \tag{12}$$

где $S(\rho)$ — произвольная функция. Рассмотрим теперь соотношения (8) на плоскостях контакта $\zeta = \pm \varkappa$.

В силу краевых условий (9), (10) имеем

$$\frac{0}{\sigma_r - \sigma_\varphi} = \frac{-p - \frac{\partial w}{\partial \zeta}}{\sigma_\varphi - \sigma_z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial \zeta} + p}{\sigma_z - \sigma_r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\frac{\partial u}{\partial \zeta}}{\tau}. \tag{13}$$

Отсюда вытекает, что на плоскостях контакта $\sigma_r = \sigma_\varphi$, следовательно, условие пластичности здесь имеет вид

$$\sigma_z - \sigma_r = \sqrt{1 - R^2}. \tag{14}$$

Далее, при $\zeta = \pm \varkappa$ из дифференциального уравнения равновесия (1) и граничного условия (4) находим $\sigma_r \big|_{\zeta = \pm\varkappa}$ и, сравнивая его с (12), определяем функцию $S(\rho)$. Таким образом,

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{3}\varkappa}\int_\rho^1 R \, d\rho + \sqrt{1 - R^2} + \frac{\varkappa^2 - \zeta^2}{2\sqrt{3}\varkappa}\left(\frac{dR}{d\rho} + \frac{R}{\rho}\right). \tag{15}$$

Условие $\sigma_r = \sigma_\varphi$ имеет место при $\zeta = \pm \varkappa$ и на оси $\rho = 0$; так как диск тонкий, то естественно принять, что всюду $\sigma_r \approx \sigma_\varphi$, и тогда из дифференциального уравнения равновесия (1) получаем

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{3}\varkappa} \int_\rho^1 R \, d\rho. \tag{16}$$

Далее, уравнение объемного сжатия (7) на плоскостях $\zeta = \pm \varkappa$ таково:

$$-2p + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \bar{k}\left(\frac{\sqrt{3}}{\varkappa} \int_\rho^1 R \, d\rho + \sqrt{1 - R^2}\right).$$

Внося сюда $\partial w / \partial \zeta$ из (13), получаем при $\zeta = \pm \varkappa$

$$-3p + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1-R^2}}{R} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \bar{k}\left(\frac{\sqrt{3}}{\varkappa} \int_\rho^1 R \, d\rho + \sqrt{1 - R^2}\right). \tag{17}$$

Рассмотрим теперь первое из соотношений (8):

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} - \left[\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{\sigma_z - \sigma_\varphi}\right]\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{u}{\rho}\right) = 0.$$

Компоненты деформации имеют порядок 1, множитель в квадратных скобках — малая величина, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} \approx 0$; но тогда $u = C(\zeta)\rho$, где $C(\zeta)$ — произвольная функция. Вычисляя теперь $\partial u / \partial \zeta$ и внося в (17), получаем

$$-3p + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1-R^2}}{R} \beta\rho = \bar{k}\left(\frac{\sqrt{3}}{\varkappa} \int_\rho^1 R \, d\rho + \sqrt{1 - R^2}\right), \tag{18}$$

где положено $\beta = (dC / d\zeta)_{\zeta = \varkappa}$. Отсюда находим

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{R(1 - R^2) + \lambda R^3 \sqrt{1 - R^2}}{\rho - \mu R^3}, \tag{19}$$

где обозначено $\lambda = 2\bar{k} / \varkappa\beta$, $\mu = 2\bar{k} / \sqrt{3}\beta$. Условие статической эквивалентности в развернутом виде таково:

$$2 \int_0^1 \left\{\frac{1}{\sqrt{3}\varkappa} \int_\rho^1 R \, d\rho + \sqrt{1 - R^2}\right\} \rho \, d\rho = p. \tag{20}$$

Полагая в (17) $\rho = 1$, найдем связь между β и $R(1)$.

§ 3. В первом приближении можно в (19) пренебречь слагаемыми с множителями λ, μ. Тогда

$$R = \frac{C\rho}{\sqrt{1 + C^2 \rho^2}},$$

где C — произвольная постоянная, определяемая по условию (20).

Во втором приближении, вполне пригодном для приложений, отбрасываем малое слагаемое μR^3 в знаменателе; тогда решение сводится к квадратурам.

В общем случае уравнение (19) интегрируется одним из численных методов; так как $\rho = 0$ является дикритическим узлом, то нужно задавать $(dR / d\rho)_{\rho=0}$ и из построенного семейства интегральных кривых выбрать ту, которая удовлетворяет (20).

Касательное напряжение R на линиях контакта является монотонно возрастающей от нуля функцией ρ. Для тонкого слоя максимум R

составляет небольшую долю единицы и приближается к ней с возрастанием p. Следует полагать, что вблизи $\rho = 1$ имеется узкая пограничная зона, в которой происходит падение R (подобно тому, как это имеет место для решения Прандтля ([1])).

Нормальное напряжение σ_z — наибольшее, имеет максимум при $\rho = 0$ и монотонно снижается к значению 1 на контуре, причем в центральной части диска σ_z практически изменяется мало; здесь возникает напряженное состояние, приближающееся по своему характеру к всестороннему равномерному растяжению, интенсивность которого растет вместе с p.

Поступило
23 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Prandtl, Zs. angew. Math. u. Mech., 3, 401 (1923). [2] В. Соколовский, Теория пластичности, 1950. [3] R. Hill, E. Lee, S. Tupper, J. Appl. Mech., 18, № 1, 46 (1951). [4] W. Schroeder, D. Webster, ibid., 16, No. 3 (1949). [5] G. G. Meyerhof, C. K. Chaplin, Brit. J. Appl. Phys., 4, No. 1 (1953).