Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Е. А. ХАЛЕЗОВ

АВТОМОРФИЗМЫ МАТРИЧНЫХ ПОЛУГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 III 1954)

Обозначим через F_n^r $(1 \leqslant r \leqslant n)$ совокупность всех квадратных матриц порядка n с элементами из тела F, ранг которых не превосходит r. Совокупность этих матриц является полугруппой относительно умножения. Гомоморфизмы полугрупп F_n^r были рассмотрены А. И. Мальцевым [1]. В настоящей заметке находятся автоморфизмы F_n^r. Автоморфизмы группы F_n всех неособенных матриц с элементами из тела F при $n \geqslant 3$ известны [2]. Автоморфизмы полугрупп F_n^r оказываются более простыми. Именно, имеет место следующая основная теорема:

Теорема 1. *Каждый автоморфизм* θ *полугруппы* F_n^r $(n \geqslant 2,$ $1 \leqslant r \leqslant n)$ *имеет вид*

$$\| x_{ij} \|^{\theta} = S \, \| x_{ij}^{\varphi} \| \, S^{-1},$$

где S — фиксированная невырожденная матрица из F_n, а φ — автоморфизм основного тела.

Доказательство сначала проводится для $n = 2$, а затем при помощи индукции распространяется на общий случай.

Лемма 1. *При автоморфизме θ полугруппы F_n^r матрицы данного ранга переходят в матрицы того же ранга.*

Действительно, если $A \in F_n^r$ — нильпотентная матрица и m — степень ее нильпотентности, то ранг $A \geqslant m - 1$. Пусть теперь $X \in F_n^r$ имеет ранг $m - 1$. Если $m - 1 = n$, то матрица X невырожденная и при автоморфизме θ перейдет в невырожденную матрицу X^{θ}. При $m - 1 < n$ найдутся такие матрицы P и Q рангов $m - 1$, что матрица $A \equiv PXQ$ будет нильпотентная со степенью нильпотентности m [1]. Но тогда и матрица $A^{\theta} = P^{\theta} X^{\theta} Q^{\theta}$ будет нильпотентная со степенью нильпотентности m, откуда следует, что ранг $X^{\theta} \geqslant m - 1$. Ранг X не может уменьшиться, следовательно, он не может и увеличиться.

Лемма 2. *Если автоморфизм φ полугруппы F_n^r оставляет на месте матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & & \\ 1 & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то существует автоморфизм φ тела F, для которого

$$\| x_{ij} \|^{\varphi} = \| x_{ij}^{\varphi} \|. \tag{1}$$

Доказательство этой леммы проведем для случая $n=2$, хотя рассуждения годятся в общем случае. Легко могут быть получены равенства

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\varphi} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

и аналогичные равенства для транспонированных матриц.

Действительно, из

$$(0) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{21} & u_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

следует $u_{21} = u_{22} = 0$. Первое из равенств (2) доказано. Так же доказываются и другие равенства.

Для построения автоморфизма φ тела F рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F_2'$. Согласно (2) имеем

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\varphi} = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим по определению $x' = x^{\varphi}$ и покажем, что φ есть автоморфизм тела F. Для этого докажем сначала равенства

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\varphi} = \begin{pmatrix} x^{\varphi} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y^{\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Замечая, что

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\varphi} = \left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{\varphi} = \begin{pmatrix} x^{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x^{\varphi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & x^{\varphi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{\varphi} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u_{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $u_{11} = x^{\varphi}$. Далее, из

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{\varphi} = \begin{pmatrix} x^{\varphi} & u_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

получаем $u_{12} = 1$. Первое из равенств (3) доказано. Аналогично доказывается и второе равенство.

Соотношение

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\varphi}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\varphi} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\varphi}$$

показывает, что $(xy)^{\varphi} = x^{\varphi} y^{\varphi}$.

Учитывая равенства (3) и соотношение

$$\begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\varphi} = \left[\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}\right]^{\varphi} = \begin{pmatrix} x^{\varphi} + y^{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем $(x+y)^{\varphi} = x^{\varphi} + y^{\varphi}$.

Формула (1) теперь легко может быть получена. Действительно, пусть $X = \| x_{ik} \|$, $X^{\varphi} = \| u_{ik} \|$ $(i,\ k = 1, 2)$. Имеем

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $u_{11} = x_{11}^{\varphi}$. Из

$$\begin{pmatrix} x_{21}^{\varphi} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\varphi} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right]^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11}^{\varphi} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{21} & u_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

следует $u_{21} = x_{21}^{\varphi}$. Аналогичные рассуждения дают $u_{12} = x_{12}^{\varphi}$, $u_{22} = x_{22}^{\varphi}$.

Переходя к доказательству основной теоремы, покажем сначала справедливость ее для полугрупп F_n^r $(r=1, 2)$. Пусть θ — автоморфизм F_2^r. Рассмотрим нильпотентные матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 1, нильпотентные матрицы A^θ и B^θ имеют те же ранги, что A и B, поэтому найдутся невырожденные матрицы S и Q такие, что

$$A^\theta=SAS^{-1}, \qquad B^\theta=QBQ^{-1}.$$

Обозначим через σ трансформацию F_2^r при помощи матрицы Q, тогда

$$A^{\theta\sigma^{-1}}=RAR^{-1}, \qquad B^{\theta\sigma^{-1}}=B, \tag{4}$$

где $R=Q^{-1}S$. Покажем, что матрицу R можно выбрать перестановочную с матрицей B. Действительно, если R — матрица, удовлетворяющая (4), то и RP, где P — невырожденная матрица, перестановочная с A, будет удовлетворять (4). Учитывая это замечание, возьмем матрицу R в виде $R=\begin{pmatrix}x&0\\y&z\end{pmatrix}$, где $x\neq0$, $z\neq0$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]^{\theta\sigma^{-1}}=\begin{pmatrix}0&0\\xz^{-1}&0\end{pmatrix},$$

следовательно, $x=z$, R перестановочна с B и $B^{\theta\sigma^{-1}}=RBR^{-1}$.

Обозначая через μ трансформацию F_2^r при помощи матрицы R, видим, что автоморфизм $\theta\sigma^{-1}\mu^{-1}$ оставляет на месте матрицы A и B. Согласно лемме 2, существует автоморфизм φ тела F такой, что $\| x_{ij}\|^{\theta\sigma^{-1}\mu^{-1}}=\| x_{ij}^\varphi\|$. Следовательно, $\| x_{ij}\|^\theta=S\| x_{ij}^\varphi\| S^{-1}$, и справедливость теоремы для матриц 2-го порядка установлена.

При рассмотрении общего случая предположим, что теорема верна для полугрупп F_m^r $(m<n,\ 1\leqslant r\leqslant m)$. Покажем ее справедливость для F_n^r $(1\leqslant r\leqslant n,\ n>2)$.

Пусть θ — автоморфизм F_n^r. Рассмотрим идемпотентную матрицу $I=\|\alpha_{ij}\|$, $\alpha_{11}=1$, $\alpha_{ij}=0$ $(i\neq1, j\neq1)$. Так как ранг и идемпотентность при автоморфизме θ сохраняются, то найдется такая невырожденная матрица C, что $I^\theta=CIC^{-1}$. Обозначая через τ трансформацию F_n^r при помощи C и полагая $\theta\tau^{-1}=\rho$, имеем $I^\rho=I$.

Рассмотрим совокупность матриц $\{X\}\subset F_n^r$, удовлетворяющих условию $IX=XI=0$. Матрицы X имеют вид $0\dotplus X_{n-1}$, где X_{n-1} — клетка размерности $n-1$. Совокупность $\{X\}$ при автоморфизме ρ переходит сама в себя.

Рассмотрим совокупность матриц $\{Y\}\subset F_n^r$, удовлетворяющих условию $IY=YI=Y$. Матрицы Y имеют вид $Y_1\dotplus0$, где Y_1—клетка размерности 1, и при автоморфизме ρ совокупность $\{Y\}$ переходит сама в себя.

Множество клеток X_{n-1} совокупности $\{X\}$ образует полугруппу $F_{n-1}^{r_1}$. Согласно индукции найдутся такие невырожденная матрица T и автоморфизм φ тела F, что на множестве $\{X\}$ будем иметь $(0\dotplus X_{n-1})^\rho= =0\dotplus TX_{n-1}^\varphi T^{-1}$.

Пусть γ — трансформация F_n^r при помощи матрицы $1\dotplus T$. Тогда автоморфизм $\nu=\rho(\varphi\gamma)^{-1}$ будет оставлять на месте матрицы из совокупности $\{X\}$, а для матриц из совокупности $\{Y\}$ будет иметь место формула $(Y_1 \dotplus 0)^{\nu} = Y_1^* \dotplus 0$, где Y_1 и Y_1^* — клетки размерности 1.

Можно показать, что для произвольной матрицы

$$Z = \left(\frac{Z_{11} \mid Z_{12}}{Z_{21} \mid Z_{22}}\right) \in F_n^r,$$

где Z_{11} — клетка размерности 1, имеет место формула

$$Z^{\nu} = \left(\frac{k^{-1}Z_{11}k \mid k^{-1}Z_{12}}{Z_{21}k \quad \mid \quad Z_{22}}\right),$$

где $k \neq 0$ — элемент тела F, зависящий только от автоморфизма ν. Доказательство этого предложения имеет вычислительный характер и нами опускается.

Легко заметить, что автоморфизм ν есть трансформация при помощи матрицы $P = k^{-1} \dotplus E$, где E — единичная матрица порядка $n-1$.

Имеем $\theta = \nu\varphi\gamma\tau$. Найдется трансформация ν' полугруппы F_n^r такая, что $\nu\varphi = \varphi\nu'$. Так как $\nu'\gamma\tau$ — трансформация F_n^r, то теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если полугруппы* F_n^r $(1 \leqslant r \leqslant n, n \geqslant 2)$ и G_m^s $(1 \leqslant s \leqslant m, m \geqslant 2)$ *изоморфны, то* $r = s$, $n = m$, *и тело* F *изоморфно телу* G.

Доказательство сходно с предыдущим.

Ивановский государственный
педагогический институт

Поступило
18 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Мальцев, ДАН, 90, № 3, 333 (1953). [2] R. Baer, Linear Algebra and Projective Geometry, N. Y., 1952.