Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. И. ПОЛАК

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЛОКАЛЬНО-ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 10 III 1954)

Известно, что аналитические функции обладают одним теоретико-множественным свойством, которое тесно связано со структурой соответствующих поверхностей наложения, хотя и может быть установлено безотносительно к понятию римановой поверхности. Если аналитическая функция $f(z)$ задана в области G, то в $f(G)$ можно найти области, обладающие следующим свойством: в каждой такой области U обратная функция $\varphi(w)$ является n-значной, т. е. в любой точке множества U функция $\varphi(w)$ принимает ровно n значений. Число n может, таким образом, меняться лишь при переходе от одной такой области к другой. В основе этого свойства лежит тот важный факт, что аналитическая функция во всех точках области своего задания, за исключением, самое большее, счетного множества точек, именно тех, в которых $f'(z)=0$, является локально-однолистной. Действительно, вышеуказанное свойство аналитической функции можно установить, опираясь исключительно на свойство локальной однолистности и некоторые другие геометрические свойства непрерывного отображения, присущие аналитической функции, совершенно при этом не используя собственно аналитичность функции.

Это обстоятельство заставляет очень серьезно отнестись к свойству локальной однолистности функций комплексного переменного.

Возникает вопрос, не будет ли иметь место указанное свойство у функций, обратных по отношению к локально-однолистным функциям, определенным на множествах достаточно общей природы, а не только на замкнутых областях. Положительное решение этого вопроса и дается в настоящей заметке.

Будем рассматривать непрерывные функции, определенные на ограниченных, замкнутых и локально-связных множествах, причем будем полагать, что в некоторой окрестности каждой точки z функция однолистна. Такие функции будем называть локально-однолистными. Заметим тотчас, чтобы более не возвращаться к этому, что отсюда уже тривиальным образом следует конечнократность отображения: полный прообраз каждой точки есть конечное множество.

Теорема. *Пусть на ограниченном, замкнутом и локально-связном* множестве Z, лежащем в плоскости z, определена непрерывная локально-однолистная функция $f(z)$ и пусть $\varphi(w)$ есть соответствующая обратная функция. Тогда найдется в мно-*

* Простейший пример: гомеоморфизм между двумя канторовыми совершенными множествами — показывает важность этого условия.

жестве $W = f(Z)$ такое замкнутое, нигде не плотное в W множество, которое разбивает W на счетную или конечную систему $\{G_i\}$ связных и открытых в W множеств, обладающих тем свойством, что число значений, которое принимает функция $\varphi(w)$ в каждой точке такой области G_i, остается постоянным для всей этой области и, следовательно, может меняться только при переходе от одной области к другой. Таким образом, на каждой области G_i функция $\varphi(w)$ n-значна, где n — некоторое число, зависящее от i.

Доказательство основывается на одном определении и теореме, принадлежащих Куратовскому.

Определение (Куратовского). Пусть $f(x)$ — непрерывное отображение компакта R на R', а $f^{-1}(y)$ — полный прообраз точки $y \in R'$. Назовем элемент A непрерывного разбиения R на полные прообразы точек $y \in R'$ правильным, если из условия $A \cap lt\, A_i \neq 0$ следует $A \cap lt\, A_i = A$, где A_i любая сходящаяся последовательность элементов разбиения.

Теорема А (Куратовского). *Множество P всех точек компакта R', полные прообразы которых суть правильные элементы, плотно в пространстве R'.*

Из этой теоремы легко вытекает следующее утверждение:

Теорема В. *Пусть $f^{-1}(y_0)$ есть правильный элемент. Тогда для любого ε найдется такое δ, что для всякой точки y из δ-окрестности точки y_0 отклонение* (²) *множества $f^{-1}(y)$ от $f^{-1}(y_0)$ меньше ε.*

Доказательство тривиально. Действительно, предполагая противное, тотчас построим такую сходящуюся к y_0 последовательность точек $y_i \in R'$, что $\{f^{-1}(y_i)\}$ есть сходящаяся последовательность, а $\rho[f^{-1}(y_i), f^{-1}(y_0)] \geqslant \varepsilon$ *, где ε — некоторое фиксированное положительное число. Но тогда, очевидно, $lt\, f^{-1}(y_i) \subseteq f^{-1}(y_0)$, а значит, $lt\, f^{-1}(y_i) = f^{-1}(y_0)$, т. е., начиная с некоторого i, $\rho[f^{-1}(y_i), f^{-1}(y_0)]$ должно быть меньше ε.

Пусть теперь функция $f(z)$, определенная на локально-связном компакте Z в плоскости z, удовлетворяет условиям теоремы, а P — множество тех точек $p \in W$, для которых $f^{-1}(p)$ суть правильные элементы. Пусть p_0 есть точка из P и прообраз $f^{-1}(p_0)$ состоит из n точек.

Выберем ε так, чтобы: 1) в ε-окрестности каждой точки z_0 из $f^{-1}(p_0)$ функция $f(z)$ была бы однолистна; 2) чтобы ε-окрестности точек из $f^{-1}(p_0)$ не пересекались.

Для такого ε, в силу теоремы B, найдется такое δ, что $\rho[f^{-1}(p_0), f^{-1}(w)] < \varepsilon$ (¹) для всякой точки w из δ-окрестности p_0. Легко видеть, что множество $f^{-1}(w)$ состоит ровно из n точек. Действительно, очевидно, что число точек в $f^{-1}(w)$ не меньше, чем n. В силу условия (1) в ε-окрестности каждой точки $z_0 \in f^{-1}(p_0)$ найдется точка z^* из $f^{-1}(w)$, и притом лишь одна в силу однолистности $f(z)$ в ε-окрестности каждой точки $f^{-1}(p_0)$. Так как окрестности не пересекаются, то число точек в $f^{-1}(w)$ не может быть меньше n. Но каждая точка из $f^{-1}(w)$ обязательно, в силу того же условия (1), лежит в ε-окрестности некоторой точки из $f^{-1}(p_0)$. В силу тех же соображений очевидно, что точек в $f^{-1}(w)$ не может быть больше n.

Таким образом, для каждой точки $p \in P$ можно найти такое $\delta(p)$, что полный прообраз всякой точки w из δ-окрестности точки p содержит столько же точек, что и полный прообраз точки p.

Множество $W = f(Z)$ локально связно. Значит, в каждой δ-окрестности точки p можно найти связную окрестность $U(p)$. Очевидно, что $\Sigma U(p)$ для всех $p \in P$ есть множество открытое и плотное в W.

* ρ есть отклонение множеств.

В силу локальной связности W каждая компонента G_i этого множества есть множество, открытое в W.

Покажем теперь, что в пределах данной компоненты полный прообраз каждой точки состоит из одного и того же числа точек. Этим будет доказана наша теорема.

Пусть $w_1 \in G_i$ и $f^{-1}(w_1)$ состоит из n точек и пусть w_2 — любая другая точка области G_i. Построим множества S_1 и S_2 следующим образом. Пусть $U_1(p)$ — элемент состемы $[U(p)]$, содержащий точку w_1. Обозначим через S_1 сумму всех тех элементов $U(p)$, каждый из которых может быть соединен с $U_1(p)$ конечной цепью элементов из $U(p)$, т. е. такой, что $U_{k-1} \cap U_k$ и $U_k \cap U_{k+1}$ не пусты. Такую же операцию проделаем для w_2, и получим множество S_2. Очевидно, что S_1 и S_2 — открытые множества в W. В силу определения $U(p)$ полный прообраз каждой точки из S_1 состоит из n точек. Равенство числа точек в прообразах точек w_1 и w_2 будет установлено, если мы докажем, что S_1 и S_2 пересекаются.

Предположим, что S_1 и S_2 не пересекаются. Тогда в силу связности G_i должны найтись точки из G_i, не принадлежащие ни S_1, ни S_2. Обозначим через S_0' множество точек всех тех $U(p)$, каждое из которых содержит хоть одну из точек множества $S_0 = G_i - (S_1 + S_2)$. Множество S_0' не может пересекаться ни с S_1, ни с S_2. Но тогда G_i распадается на три взаимно не пересекающихся, открытых в G_i множества, что невозможно. Теорема доказана.

Замечание. Функции, аналитические в замкнутой ограниченной области, могут на конечном множестве точек испытывать нарушение локальной однолистности. Поэтому функции, локально-однолистные всюду, за исключением конечного множества точек, представляют собой более естественное обобщение понятия аналитической функции в принятом нами направлении, нежели функции локально-однолистные во всей области.

Оказывается, что для таких функций, при условии, что каждое значение принимается на множестве Z конечное число раз, справедлива наша теорема относительно структуры обратной функции. Доказательство почти не отличается от доказательства нашей теоремы и поэтому здесь не приводится.

Московский физико-технический институт

Поступило 2 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Kuratowskiy, Fund. Math., II (1928). [2] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937.