Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. Я. ЛЯЩЕНКО

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 3 III 1954)

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор, а $A(t)$ — n-мерная матрица, определенная как функция t для $0 \leqslant t < \infty$ и удовлетворяющая условию

$$|A(t)| < M. \tag{2}$$

Рассмотрим в том же интервале изменения t n-мерную матрицу $B(t)$, удовлетворяющую неравенствам:

$$\begin{gathered} |B(t)| \leqslant M, \\ |B(t') - B(t'')| \leqslant \delta\,|t' - t''|. \end{gathered} \tag{3}$$

Предположим, что корни $p_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ соответствующего характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\,\|pE - B(t)\| = 0$$

таковы, что

$$\mathrm{Re}\,\{p_i(t)\} < -\gamma, \quad \gamma > 0. \tag{4}$$

При выполнении этих условий имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если для всех t_0, t из $0 \leqslant t_0$, $t < \infty$ выполняется неравенство*

$$\left|\int_{t_0}^{t} [A(\tau) - B(\tau)]\,d\tau\right| \leqslant Q\,|t - t_0| + R, \tag{5}$$

где Q и R — положительные постоянные, удовлетворяющие условию

$$QT + R \leqslant \frac{1}{4\,[1 + 2MTa^2\,e^{-\gamma T}]}, \tag{6}$$

в котором

$$a = \frac{2^n \lambda}{\gamma^n}, \quad \lambda = 2^{n-1} M^n \sqrt{(n-1)^{n-1}}, \quad T = \frac{4}{\gamma}\,|\ln 2a|,$$

и если, кроме того, постоянная Липшица

$$\delta \leqslant \frac{e^{\gamma T}}{4a^2 T^2}, \tag{7}$$

то решение системы (1) *удовлетворяет неравенству*

$$|x(t)| \leqslant Ke^{-\frac{\gamma}{4}t} |x(0)|, \quad t \geqslant 0. \tag{8}$$

Действительно, систему (1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = B(t_0)x + [B(t) - B(t_0)]x + [A(t) - B(t)]x,$$

откуда

$$x(t) = U(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t - \tau)[B(\tau) - B(t_0)]x(\tau)d\tau +$$

$$+ x(t)\int_{t_0}^{t} [A(\tau) - B(\tau)]d\tau -$$

$$- \int_{t_0}^{t} \left\{\int_{t_0}^{\tau} [A(\tau') - B(\tau')]d\tau'\right\}\{U(t-\tau)A(\tau)x(\tau) - B(\tau)U(t-\tau)x(\tau)\}d\tau;$$

$$U(t - t_0) = e^{B(t_0)(t-t_0)}.$$

Имеем, таким образом, для $t \geqslant t_0$

$$|x(t)| \leqslant |U(t-t_0)|\cdot|x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |U(t-\tau)|\cdot|B(\tau) - B(t_0)|\cdot|x(\tau)|d\tau +$$

$$+ |x(t)|\cdot\left|\int_{t_0}^{t} [A(\tau) - B(\tau)]d\tau\right| + \int_{t_0}^{t}\left|\int_{t_0}^{\tau} [A(\tau') - B(\tau')]d\tau'\right| \times$$

$$\times \{|U(t-\tau)|\cdot|A(\tau)|\cdot|x(\tau)| + |B(\tau)|\cdot|U(t-\tau)|\cdot|x(\tau)|\}d\tau.$$

Воспользовавшись оценкой матрицы $U(t-t_0)$ [1], соотношениями (2), (3), (5), для $|x(t)|$ получим:

$$|x(t)| \leqslant ae^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)}\cdot|x(t_0)| + \delta a^2(t-t_0)e^{-\gamma(t-t_0)}\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}|x(\tau)| +$$

$$+ [Q(t-t_0) + R][1 + 2Ma^2(t-t_0)e^{-\gamma(t-t_0)}]\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}|x(\tau)|.$$

Полагая $t - t_0 = T$, из последнего неравенства, в силу условий (6) и (7), находим

$$|x(t_0 + T)| \leqslant 2ae^{-\frac{\gamma}{2}T}|x(t_0)|. \tag{9}$$

Если зафиксировать теперь T так, чтобы

$$Ke^{-\frac{\gamma}{4}T} = 1, \quad K = 2a,$$

то неравенство (9) примет вид

$$|x(t_0 + T)| \leqslant e^{-\frac{\gamma}{4}T}|x(t_0)|.$$

Отсюда путем несложных рассуждений убеждаемся в справедливости неравенства (8), и теорема доказана.

В частном случае, когда $A(t) \equiv B(t)$ для всех $t \geqslant 0$, при выполнении условий (3), (4) имеет место

Теорема 2. *Если постоянная Липшица удовлетворяет условию*

$$\delta \leqslant \frac{e^{\gamma T}}{2a^2T^2},$$

где

$$a = \frac{2^n\lambda}{\gamma^n}, \quad \lambda = 2^{n-1} M^n \sqrt{(n-1)^{n-1}}, \quad T = \frac{4}{\gamma} |\ln 2a|,$$

то для всех значений $t \geqslant 0$ *решение системы* (1) *обладает свойством* (8).

В силу этой теоремы решение системы уравнений (1) с «достаточно медленным изменением коэффициентов» будет устойчивым, если корни характеристического уравнения (4) имеют существенно отрицательные вещественные части. Мы получаем здесь, таким образом, обоснование часто используемого приема, заключающегося в том, что при исследовании устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с «медленным изменением коэффициентов» с этими системами обращаются так, как будто они обладают постоянными коэффициентами, и об устойчивости их решений судят по корням характеристического уравнения.

Следует заметить, что наша теорема 1 является более общей и позволяет трактовать случаи, когда в $A(t)$ наряду с членами достаточно медленно меняющимися имеются и «высокочастотные» члены.

В заключение автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность Н. Н. Боголюбову за предложенную тему и руководство работой.

Поступило
22 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. З. Штокало, Матем. сборн., 19 (61): 2, 263 (1946).