

# Аналитические Расчеты Вкладов в Аномальные Магнитные Моменты Лептонов от Поляризации Вакуума Пятью Лептонными Петлями на Основе Представления Меллина–Барнса

В.И. Лашкевич\*

*Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого,  
пр-т Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь*

О.П. Соловцова†

*Объединенный институт ядерных исследований,  
ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, Московская область, г. Дубна, Россия and  
Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого,  
пр-т Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь*

Л.П. Каптарь‡

*Объединенный институт ядерных исследований,  
ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, Московская область, г. Дубна, Россия*

Получены явные аналитические выражения для электромагнитных поправок к аномальным магнитным моментам  $a_L$  лептонов ( $L = e, \mu$  и  $\tau$ ) в двенадцатом порядке разложения по константе взаимодействия от фейнманских диаграмм со вставками поляризационного оператора из пяти одинаковых лептонных петель, образованных лептонами сорта  $\ell$  другого, чем у исходного лептон  $L, \ell \neq L$ . Исследования основаны на последовательном применении дисперсионных соотношений для поляризованного оператора и преобразовании Меллина–Барнса для пропагаторов массивных частиц. Получены из точных формул разложения в пределе как малых, так и больших значений отношения масс лептонов  $r = m_\ell/m_L, r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ .

**PACS numbers:** 13.40.Em, 12.20.Ds, 14.60.Ef

**Keywords:** anomalous magnetic moment of leptons, Mellin-Barnes representation, Feynman diagrams, electromagnetic vacuum-polarization contributions

---

\*E-mail: lashkevich@gstu.gomel.by

†E-mail: olsol@theor.jinr.ru; solovtsova@gstu.gomel.by

‡E-mail: kaptari@theor.jinr.ru

## 1. Введение

Известно, что взаимодействие лептона  $L$  с фотонами приводит к сдвигу гиромагнитного отношения  $g_L$  от значения равного 2, следующего из уравнения Дирака [1]. Величина такого сдвига характеризуется аномальным магнитным моментом лептона  $a_L$  и определяется как отношение  $a_L \equiv (g_L - 2)/2$ . Несмотря на то, что сдвиг чрезвычайно мал, его теоретические и экспериментальные исследования представляют большой научный интерес. Это связано с тем, что измерения  $a_L$  для электрона [2, 3] и мюона [4, 5] проведены с чрезвычайно высокой точностью и это налагает соответствующие требования на точность теоретических расчётов. Детальный обзор вкладов различных механизмов в  $a_L$  можно найти, например, в [6, 7], а широко обсуждаемое до сих пор отклонение между экспериментальными значениями и теоретическими предсказаниями Стандартной Модели для аномального магнитного момента мюона – в работах [8–15].

В настоящее время, как правило, теоретические расчеты для вкладов в  $a_L$  требуют довольно больших компьютерных ресурсов и тщательной проверки, а для того, чтобы достичь очень высокой точности вычислений, необходимость которой диктуется прецизионными экспериментами по нахождению аномальных магнитных моментов электрона и мюона, требуется разработка специальных алгоритмов (см., например, [15–18]). Поскольку при таких расчетах детальный анализ вкладов различных механизмов в  $a_L$  затруднен, то представляет интерес выделение, хотя бы подклассов фейнманских диаграмм, для которых удалось бы провести расчеты в аналитическом, замкнутом виде. К такому подклассу относятся диаграммы со вставками фотонного поляризаационного оператора, состоящие только из лептонных петель, так называемые, диаграммы ‘пузырькового’ типа.

В работе [19], основываясь на интегральном представлении Меллина–Барнса, рассматривалась задача получения аналитических выражений от таких диаграмм в аномальный магнитный момент мюона в виде разложений по отношению масс лептонов  $r = m_\ell/m_L$ , где  $m_L$  и  $m_\ell$  обозначают массу внешнего лептона  $L$  и массу лептонов  $\ell$  из поляризаационного оператора, соответственно. В работе [20] этот подход был обобщен для нахождения явных аналитических выражений вкладов для любого из лептонов  $L = e, \mu$  и  $\tau$  и для всего интервала отношения масс лептонов  $0 < m_\ell/m_L < \infty$ . Было показано, что поправки к  $a_L$  от диаграмм со вставками фотонного поляризаационного оператора целиком определяются диаграммами с обменом всего лишь одного, но массивного, фотона. Применение преобразования Меллина–Барнса к таким диаграммам позволяет получить общие выражения для  $a_L$  в виде одномерных интегралов в комплексной плоскости от произведения двух меллиновских моментов. Следует отметить, что преобразование Меллина–Барнса широко используется в физике частиц, см., например, [21, 22]. Впервые применение преобразования Меллина–Барнса при вычислении фейнмановских интегралов, содержащих массивные пропагаторы, было предложено в работе [23], а непосредственное использование этой техники в получении аналитических выражений для вкладов в  $a_L$  – в работе [24], и далее, как отмечалось выше, получило развитие в работах [19, 20].

Настоящая работа является дальнейшим применением подхода [19, 20] для нахождения поправок к  $a_L$  порядка  $\alpha^6$  от диаграмм с пятью одинаковыми внутренними петлями. Ранее в работе [25] были получены точные аналитические выражения для поправок к  $a_L$  от диаграмм со вставками в поляризаационный оператор из четырех одинаковых лептонных петель  $\ell \neq L$ , а в работе [26] – точные аналитические выражения для вкладов, когда две петли образованы такими же лептонами, как и исходный лептон  $L$ , а две другие – лептонами сорта  $\ell$ . Понятно, что расчеты по точным формулам позволяют легко находить численные значения интересующих нас вкладов в

$a_L$  с любой наперед заданной точностью, а также получать более простые выражения в виде разложений по отношению лептонных масс  $r = m_\ell/m_L$  с контролируемой точностью.

## 2. Теоретические основы

Нахождение точных выражений для электромагнитных поправок от диаграмм с  $n$  замкнутыми петлями в рамках подхода, использующего преобразование Меллина–Барнса, детально разобрано в работе [20]. Исходный интеграл для поправок записывается в виде [19, 20]

$$a_L(p, j) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{2\pi i} F_{(p,j)} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz \left( \frac{4m_\ell^2}{m_L^2} \right)^{-z} \Gamma(z)\Gamma(1-z) \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^p \Omega_p(z) \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^j R_j(z), \quad (1)$$

где  $p$  число лептонных петель, образованных лептонами сорта  $L$ , а  $j$  – лептонами сорта  $\ell$ ,  $n = p + j$ ,  $F_{(p,j)} = (-1)^{p+j+1} C_{p+j}^p$ , а  $C_{p+j}^p$  – биномиальные коэффициенты, число  $c$  – любое из интервала  $a < \text{Re } z < b$ , в котором подынтегральная функция (1) аналитична. Меллиновские моменты  $\Omega_p(z)$  и  $R_j(z)$  определяются поляризационными операторами  $\Pi^{(L)}$  и  $\Pi^{(\ell)}$  согласно выражениям

$$\left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^p \Omega_p(z) = \int_0^1 dx x^{2z} (1-x)^{1-z} \left[ \Pi^{(L)} \left( -\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) \right]^p, \quad (2)$$

$$\left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^j R_j(z) = \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left( \frac{4m_\ell^2}{y} \right)^z \frac{1}{\pi} \text{Im} [\Pi^{(\ell)}(y)]^j. \quad (3)$$

Явный вид поляризационных операторов  $\Pi^{(L,\ell)}$  в формулах (2) и (3) хорошо известен

$$\text{Re } \Pi^{(L,\ell)}(y) = \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) \left[ \frac{8}{9} - \frac{\delta^2}{3} + \delta \left( \frac{1}{2} - \frac{\delta^2}{6} \right) \ln \frac{|1-\delta|}{1+\delta} \right], \quad (4)$$

$$\frac{1}{\pi} \text{Im } \Pi^{(L,\ell)}(y) = \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) \delta \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \delta^2 \right) \theta(y - 4m_{(L,\ell)}^2), \quad (5)$$

где  $\delta = \sqrt{1 - 4m_{(L,\ell)}^2/y}$ . Из-за наличия  $\theta$ -функции в (5), поляризационный оператор  $\Pi^{(L)} \left( -\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right)$  является вещественным и не зависит от лептонных масс

$$\Pi^{(L)} \left( -\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{5}{9} + \frac{4}{3x} - \frac{4}{3x^2} + \left( -\frac{1}{3} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} \right) \ln(1-x) \right]. \quad (6)$$

Простой заменой переменной  $y = \frac{4m_\ell^2}{\xi}$  в (3), легко показать, что и  $R_j(z)$  также не зависит от масс лептонов. Таким образом, единственная зависимость аномального магнитного момента (1) от лептонных масс входит только через их отношение

$$r = \frac{m_\ell}{m_L}. \quad (7)$$

Соответственно, в литературе общепринято классифицировать электродинамические вклады в аномальный магнитный момент  $a_L$  в зависимости от  $r$ , выделяя при

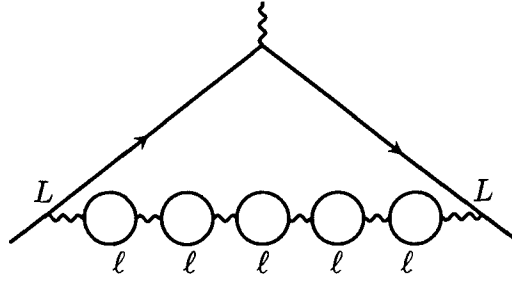


Рис. 1. Диаграмма, дающая вклад в поправку двенадцатого порядка в аномальный магнитный момент лептона  $L$ , в случае, когда все лептоны в петлях одного сорта и отличны от внешний лептон  $L$ ,  $\ell \neq L$ .

этом масс-независимый вклад  $A_1$  (также называемый универсальным,  $r = 1$ ) и масс-зависимые  $A_2$  и  $A_3$  вклады (см., например, [7]):

$$a_L = A_1 \left( \frac{m_L}{m_L} \right) + A_2 \left( \frac{m_\ell}{m_L} \right) + A_3 \left( \frac{m_{\ell_1}}{m_L}, \frac{m_{\ell_2}}{m_L} \right). \quad (8)$$

Каждое из слагаемых в сумме (8) может быть представлено в виде разложения по постоянной тонкой структуре  $\alpha$  как  $A_3$  вклады (см., например, [7]):

$$A_1(m_L/m_L) = \sum_{i=1} A_1^{(2i)} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^i, \quad A_2(m_\ell/m_L) = \sum_{i=2} A_2^{(2i)} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^i \quad \text{и т.д.} \quad (9)$$

Лидирующей поправке к  $a_L$ , впервые полученной Ю. Швингером [27], соответствует коэффициент  $A_1^{(2)} = 1/2$ . Точные аналитические выражения известны только для универсальных коэффициентов  $A_1^{(4)}$  и  $A_1^{(6)}$  (см., например, [6]). Если же диаграммы содержат только лептонные петли, то точные аналитические выражения известны вплоть до  $n = 13$  [28]. Интересно отметить, что значения этих коэффициенты падают до  $n = 7$ , а потом начинают расти, причём при  $n \gg 1$  факториально (см. [29, 30]).

В настоящей работе мы продолжим нахождение явных аналитических выражений для вкладов от пяти лептонных петель для масс-зависимых коэффициентов двенадцатого порядка  $A_2^{(12)}(r)$ , входящего в выражение (9). Соответствующая этому случаю диаграмма представлена на Рис. 1. В дальнейшем, для проверки предела при  $r \rightarrow 1$  нам понадобится выражение для универсального коэффициента, соответствующего поляризации вакуума пятью одинаковыми лептонными петлями  $A_1^{(12)}$ . Соответствующее выражение имеет вид [31]

$$A_1^{(12)} = \frac{428632663}{42987672} + \frac{19672 \pi^4}{1607445} - \frac{80 \pi^6}{5103} + \frac{83360 \zeta(5)}{22113} = 3.4468727205 \dots \times 10^{-4}. \quad (10)$$

### 3. Аналитические расчеты

Как следует из выражения (1), коэффициент разложения  $A_2^{(12),5\ell}$ , определяющий вклад  $a_L^{5\ell} = A_2^{(12),5\ell} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^6$  в аномальный магнитный момент лептона  $L$  от изображенной на Рис. 1 диаграммы,  $p = 0$ ,  $j = 5$ , представляется в виде

$$A_2^{(12),5\ell}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (4t)^{-z} \Gamma(z) \Gamma(1-z) \Omega_0(z) R_5(z) dz, \quad (11)$$

Здесь и далее мы используем также переменную, соответствующую квадрату отношения масс лептонов,

$$t = r^2,$$

где  $r$  определено в (7).

Вычисляя по формулам (2) и (3) входящие в это выражение меллиновские моменты  $\Omega_0(z)$  и  $R_5(z)$ ,

$$\Omega_0(z) = \frac{\Gamma(1+2z)\Gamma(2-z)}{\Gamma(3+z)}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} R_5(z) = & \int_0^1 2\delta(1-\delta^2)^{z-1} \left\{ 5 \left[ \frac{8}{9} - \frac{1}{3}\delta^2 + \delta \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\delta^2 \right) \ln \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right) \right]^4 \delta \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\delta^2 \right) \right. \\ & - 10\pi^2 \left[ \left( \delta \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\delta^2 \right) \right)^3 \right] \left[ \frac{8}{9} - \frac{1}{3}\delta^2 + \delta \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\delta^2 \right) \ln \left( \frac{1-\delta}{1+\delta} \right) \right]^2 \\ & \left. + \pi^4 \left[ \delta \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\delta^2 \right) \right]^5 \right\} d\delta, \quad (13) \end{aligned}$$

и подставляя их в (11), мы приходим к выражению

$$A_2^{(12),5\ell}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z} \mathcal{F}(z) dz, \quad (14)$$

где подынтегральная функция  $\mathcal{F}(z)$  есть

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) = & \left[ \frac{5}{6561} \frac{N_2(z)}{Q_1(z)} + \frac{10}{27} \frac{N_1(z)}{Q_1(z)} \left( 2\psi^{(1)}(z) - \frac{\pi^2}{3} \right) + \frac{50}{3} N_3(z)(1+z)^2 \right. \\ & \left. \times \left( 6(\psi^{(1)}(z))^2 + \psi^{(3)}(z) - 2\pi^2\psi^{(1)}(z) + \frac{\pi^4}{10} \right) \right] \frac{\pi^2(1-z)}{Q_2(z)(1+z)(2+z)\sin^2(\pi z)}. \quad (15) \end{aligned}$$

$\psi^{(k)}(z)$  – это полигамма-функция  $k$ -го порядка ( $k = 1, 2, 3$ ), а для краткости записи для полиномов введены обозначения

$$\begin{aligned} N_1(z) = & 80208000 + 63155640z - 287700558z^2 - 571876945z^3 - 358461343z^4 \\ & + 21115161z^5 + 156212628z^6 + 100205115z^7 + 33458487z^8 + 6686149z^9 \\ & + 804130z^{10} + 53760z^{11} + 1536z^{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2(z) = & 3362591232 + 34462877976z - 7715002446z^2 - 112423073115z^3 \\ & - 106919635274z^4 + 6563589052z^5 + 78097655768z^6 + 65706605267z^7 \\ & + 29226969024z^8 + 8053533108z^9 + 1418298368z^{10} + 155629568z^{11} \\ & + 9699328z^{12} + 262144z^{13}, \end{aligned}$$

$$N_3(z) = 5005 + 4416z + 1389z^2 + 186z^3 + 9z^4.$$

Полиномы в знаменателе есть

$$Q_1(z) = z(1+z)(2+z)(3+z)(4+z)(5+z),$$

$$Q_2(z) = (1+2z)(3+2z)(5+2z)(7+2z)(9+2z)(11+2z)(13+2z)(15+2z).$$

Легко заметить, что подынтегральная функция  $\mathcal{F}(z)$  в (14) сингулярна в комплексной плоскости переменной  $z$  с многочисленными полюсами различной кратности, обусловленными знаменателями в  $\mathcal{F}(z)$  и сингулярностями функций  $\psi^{(k)}(z)$ ,  $1/\sin^2(\pi z)$  и нулями полиномов  $Q_1(z)$  и  $Q_2(z)$ . Тогда интеграл (14) может быть вычислен по теореме Коши о вычетах, замыкая контур интегрирования, поочередно, в левой ( $t < 1$ ) и правой ( $t > 1$ ) полуплоскостях.

### 3.1. Левая полуплоскость $t < 1$

Функция  $\mathcal{F}(z)$  имеет в левой полуплоскости полюсы при  $z = -1/2, -3/2, -5/2, -7/2, -9/2, -11/2, -13/2, -15/2, 0, -1, -2, -3, -4, \dots, -n, \dots$ . Вычеты в точках  $z$  с отрицательными полуцелыми значениями  $z = -1/2, -3/2, -5/2, -7/2, -9/2, -11/2, -13/2, -15/2$  вычисляются непосредственно как вычеты в полюсах первого порядка:  $\text{Res} [\mathcal{F}(z)t^{-z}, (z, -1/2, -3/2, -5/2, -9/2, -11/2, -13/2, -15/2)]$ . При отрицательных целочисленных значениях  $z = -n$  вычеты при  $z = 0, z = -1, z = -2, z = -3, z = -4, z = -5$ , вычисляем непосредственно. Начиная  $z = -6$  вычеты находим при помощи компьютерных программ, допускающие аналитические символьные вычисления, например, при помощи программных систем “Wolfram Mathematica” или “Maple” со встроенными библиотеками символьных вычислений в этой области.

Результат применения теоремы Коши для (14) в левой полуплоскости может быть представлен в следующем виде

$$A_2^{(12),5\ell}(t < 1) = P_0(t) + P_1(t) \ln(t) + P_2(t) \ln^2(t) + P_3(t) \ln^3(t) + P_4(t) \ln^4(t) + P_5(t) \ln^5(t) + \frac{5}{486} t^2 \ln^6(t) + \Sigma_1(t), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} P_0(t) = & r_0(t) - \frac{t}{2} q_5(t) \Phi\left(t, 2, \frac{1}{2}\right) - [tq_4(t) + \pi^2 q_2(t)] \Phi\left(t, 4, \frac{1}{2}\right) - 2q_2(t) \Phi\left(t, 6, \frac{1}{2}\right) \\ & + \left[ q_7(t) + \pi^2 \left( \frac{125}{243} + q_1(t) \right) \right] \text{Li}_2(t) + \left[ \frac{3170}{729} + \frac{18080t^2}{18711} + \pi^2 \left( \frac{20}{81} + \frac{64000t}{27027} - \frac{9040t^2}{18711} \right) \right] \\ & \times \text{Li}_3(t) + \left( \frac{1000}{243} - \frac{100\pi^2 t^2}{27} + 2q_1(t) \right) \text{Li}_4(t) + \left( \frac{160}{81} + \frac{256000t}{27027} - \frac{36160t^2}{18711} \right) \text{Li}_5(t) \\ & - \frac{200}{27} t^2 \text{Li}_6(t) + [q_8(t) + \pi^2 q_3(t)] \zeta(3) + \frac{400}{27} t^2 \zeta^2(3) + \left( -\frac{40}{27} + \frac{608480t}{27027} - \frac{517040t^2}{18711} \right. \\ & \left. + \frac{320t^3}{27} - \frac{200t^4}{21} - \frac{800t^5}{189} \right) \zeta(5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(t) = & r_1(t) + \sqrt{t} q_5(t) \operatorname{arctanh}(\sqrt{t}) + [tq_4(t) + \pi^2 q_2(t)] \Phi\left(t, 3, \frac{1}{2}\right) + 2q_2(t) \\ & \times \Phi\left(t, 5, \frac{1}{2}\right) + \left[ q_7(t) + \pi^2 \left( \frac{125}{243} + q_1(t) \right) \right] \ln(1-t) + \left[ -\frac{1585}{729} - \frac{9040t^2}{18711} + \pi^2 \right. \\ & \left. \left( -\frac{10}{81} - \frac{32000t}{27027} + \frac{4520t^2}{18711} \right) \right] \text{Li}_2(t) + \left( -\frac{500}{243} - 2q_1(t) + \frac{100\pi^2 t^2}{27} \right) \text{Li}_3(t) \\ & + \left( -\frac{80}{81} - \frac{64000t}{9009} + \frac{9040t^2}{6237} \right) \text{Li}_4(t) + \frac{200}{27} t^2 \text{Li}_5(t) + \left( -\frac{500}{243} + \frac{1040t}{81} + \frac{5500t^2}{243} \right. \\ & \left. + \frac{400\pi^2 t^2}{81} + \frac{2480t^3}{243} + \frac{8620t^4}{1323} - \frac{17968t^5}{35721} \right) \zeta(3) + \frac{400}{9} t^2 \zeta(5), \end{aligned}$$

$$P_2(t) = r_2(t) - \frac{1}{2} [tq_4(t) + \pi^2 q_2(t)] \Phi\left(t, 2, \frac{1}{2}\right) - q_2(t) \Phi\left(t, 4, \frac{1}{2}\right) + q_6(t) \text{Li}_2(t) + \left(\frac{20}{81} + \frac{64000t}{27027} - \frac{9040t^2}{18711}\right) \text{Li}_3(t) - \frac{100}{27} t^2 \text{Li}_4(t) + \frac{3}{2} q_3(t) \zeta(3),$$

$$P_3(t) = r_3(t) + \frac{1}{3\sqrt{t}} [tq_4(t) + \pi^2 q_2(t)] \text{arctanh}(t) + \frac{q_2(t)}{3} \Phi\left(t, 3, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} q_6(t) \ln(1-t) + \left(-\frac{10}{243} - \frac{32000t}{81081} + \frac{4520t^2}{56133}\right) \text{Li}_2(t) + \frac{100}{81} t^2 \text{Li}_3(t) + \frac{200}{81} t^2 \zeta(3),$$

$$P_4(t) = r_4(t) - \frac{q_2(t)}{12} \Phi\left(t, 2, \frac{1}{2}\right) - \frac{25}{81} t^2 \text{Li}_2(t),$$

$$P_5(t) = r_5(t) + \frac{q_2(t)}{30\sqrt{t}} \text{arctanh}(\sqrt{t}) - \frac{5}{81} t^2 \ln(1-t).$$

$$r_0(t) = -\frac{2182775}{472392} + \frac{87293477053t}{5884534656} + \frac{176687074747979t^2}{841488455808} + \frac{73568146919881t^3}{2524465367424} + \frac{1350930767457499t^4}{44178143929920} + \frac{26721178463513701t^5}{16699338405509760} - \frac{102042753011t^6}{2524465367424} - \frac{3819178367t^7}{841488455808} + \pi^4 \left(-\frac{25}{243} - \frac{5591\sqrt{t}}{107163} + \frac{1387093t}{1327104} + \frac{50t^{3/2}}{189} - \frac{1991525t^2}{663552} - \frac{7t^{5/2}}{243} - \frac{530419t^3}{3981312} - \frac{7371647t^4}{16257024} - \frac{960238459t^5}{8778792960} - \frac{86375t^6}{1990656} - \frac{2125t^7}{442368}\right) + \pi^2 \left(-\frac{43045}{39366} + \frac{2155997363t}{329204736} + \frac{86805384044131t^2}{6731907646464} - \frac{7417922288899t^3}{25244653674240} + \frac{97332749928989t^4}{30542914321920} + \frac{175265495911850161t^5}{222657845406796800} + \frac{569625019367t^6}{6731907646464} + \frac{3415697851t^7}{373994869248}\right) + \pi^6 \left(4\frac{q_2(t)}{15\sqrt{t}} + \frac{1220t^2}{5103}\right),$$

$$r_1(t) = -\frac{323065}{78732} + \frac{396987119t}{27433728} - \frac{159240221220385t^2}{1682976911616} - \frac{57018515075261t^3}{5048930734848} - \frac{1229491263619t^4}{78889542732} - \frac{8198371932979t^5}{9638867766528} - \frac{120582161933t^6}{5048930734848} - \frac{3819178367t^7}{1682976911616} + \pi^4 \times \left(-\frac{2}{81} + \frac{27923t}{294912} + \frac{261647t^2}{165888} + \frac{158921t^3}{884736} + \frac{359735t^4}{2322432} + \frac{456565t^5}{55738368} - \frac{7375t^6}{331776} - \frac{2125t^7}{884736}\right) + \pi^2 \left(-\frac{1585}{2187} + \frac{8207039t}{2709504} - \frac{82764411661865t^2}{13463815292928} + \frac{109736576825t^3}{62332478208} - \frac{6308156116345t^4}{15707784508416} - \frac{546006438095267t^5}{1413700605757440} + \frac{214870090657t^6}{4487938430976} + \frac{3415697851t^7}{747989738496}\right),$$

$$r_2(t) = -\frac{43045}{26244} + \frac{924554641t}{109734912} + \frac{142360808448611t^2}{6731907646464} + \frac{10\pi^4 t^2}{27} + \frac{2103752891699t^3}{1682976911616} + \frac{5103989773265t^4}{1121984607744} + \frac{19246773157793t^5}{20195722939392} + \frac{569625019367t^6}{6731907646464} + \frac{3415697851t^7}{373994869248} + \pi^2 \times \left(-\frac{125}{729} + \frac{3093145t}{1990656} - \frac{9177275t^2}{2985984} + \frac{467377t^3}{5971968} - \frac{3187225t^4}{8128512} - \frac{125532185t^5}{877879296} - \frac{17275t^6}{331776} - \frac{425t^7}{73728}\right),$$

$$r_3(t) = -\frac{1585}{4374} + \frac{374125093t}{219469824} - \frac{16294024877345t^2}{4487938430976} + \frac{585417974017t^3}{1682976911616} - \frac{1814498734591t^4}{6731907646464} - \frac{4250582670379t^5}{40391445878784} + \frac{214870090657t^6}{13463815292928} + \frac{3415697851t^7}{2243969215488} + \pi^2 \left( -\frac{10}{729} + \frac{334285t}{3981312} + \frac{46595t^2}{82944} + \frac{1225175t^3}{11943936} + \frac{14425t^4}{387072} - \frac{643565t^5}{83607552} - \frac{1475t^6}{165888} - \frac{425t^7}{442368} \right),$$

$$r_4(t) = -\frac{125}{2916} + \frac{1386035t}{3981312} - \frac{2120425t^2}{5971968} + \frac{25\pi^2 t^2}{243} + \frac{1002299t^3}{11943936} - \frac{4035t^4}{200704} - \frac{6853877t^5}{250822656} - \frac{17275t^6}{1990656} - \frac{425t^7}{442368},$$

$$r_5(t) = -\frac{1}{486} + \frac{44131t}{2654208} + \frac{7271t^2}{165888} + \frac{125369t^3}{7962624} - \frac{1585t^4}{2322432} - \frac{21733t^5}{7962624} - \frac{295t^6}{331776} - \frac{85t^7}{884736},$$

$$q_1(t) = \frac{653353744t}{243486243} + \frac{160115785t^2}{12966723} + \frac{4768t^3}{5103} + \frac{320t^4}{1323} + \frac{128t^5}{5103},$$

$$q_2(t) = \frac{35675t}{147456} - \frac{369625t^2}{147456} - \frac{51275t^3}{49152} - \frac{23975t^4}{49152} - \frac{1375t^5}{147456} + \frac{3575t^6}{49152} + \frac{11375t^7}{442368} + \frac{425t^8}{147456},$$

$$q_3(t) = -\frac{40}{243} + \frac{160t}{81} - \frac{80t^2}{27} + \frac{320t^3}{243} - \frac{200t^4}{189} - \frac{800t^5}{1701},$$

$$q_4(t) = -\frac{5591}{35721} + \frac{2689775t}{129024} + \frac{761957t^2}{82944} + \frac{248381t^3}{55296} + \frac{177595t^4}{2032128} - \frac{16798067t^5}{24385536} - \frac{465171655t^6}{1896846336} - \frac{41325280127t^7}{1495979476992},$$

$$q_5(t) = -\frac{400t}{63} - \frac{1241065t^2}{186624} - \frac{33565t^3}{6912} - \frac{2585t^4}{24192} + \frac{12355915t^5}{13716864} + \frac{129806365t^6}{387991296} + \frac{102514505t^7}{2642035968} + \pi^2 q_4(t) + \frac{5}{6} \pi^4 \frac{q_2(t)}{t},$$

$$q_6(t) = \frac{125}{243} + \frac{653353744t}{243486243} + \frac{160115785t^2}{12966723} - \frac{50\pi^2 t^2}{27} + \frac{4768t^3}{5103} + \frac{320t^4}{1323} + \frac{128t^5}{5103},$$

$$q_7(t) = \frac{43045}{13122} - \frac{12204800t}{2189187} - \frac{696379765t^2}{233401014} - \frac{125\pi^4 t^2}{81} - \frac{11920t^3}{5103} - \frac{160t^4}{243} - \frac{3280t^5}{45927},$$

$$q_8(t) = -\frac{3170}{729} + \frac{6080t}{243} - \frac{124520t^2}{2187} - \frac{6272t^3}{729} - \frac{814187t^4}{166698} + \frac{9522094t^5}{11252115};$$

$$\Sigma_1(t) = \sum_{n=6}^{\infty} S_1(n, t)t^n, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} S_1(n, t) = & \frac{1}{Q_2(-n)(-2+n)} \left\{ \left[ \frac{N_6(n)}{27(n-2)(n-1)n[Q_1(-n)]^2[Q_2(-n)]^3} + \frac{100\pi^2 N_4(n)}{(n-2)Q_2(-n)} \right. \right. \\ & + \frac{100 \ln^2(t) N_4(n)}{(n-2)Q_2(-n)} - \frac{100(1+n) \ln^3(t) N_3(-n)}{3} + \ln(t) \left( \frac{N_5(n)}{27(n-2)(n-1)nQ_1(-n)[Q_2(-n)]^2} \right. \\ & \left. \left. - 100(1+n)\pi^2 N_3(-n) \right) \right] \psi^{(1)}(n) + \left[ \frac{N_5(n)}{27Q_1(-n)(n-2)(n-1)n[Q_2(-n)]^2} - 100\pi^2(1+n) \right. \\ & \left. \times N_3(-n) + \frac{200N_4(n) \ln(t)}{(n-2)Q_2(-n)} - 100(1+n)N_3(-n) \ln^2(t) \right] \psi^{(2)}(n) + \frac{350}{3} \left( \frac{N_4(n)}{(n-2)Q_2(-n)} \frac{1}{Q_2(-n)} \right. \\ & \left. - (n+1)N_3(-n) \ln(t) \right) \psi^{(3)}(n) - 50(1+n)N_3(-n)\psi^{(4)}(n) + 200(1+n)N_3(-n) \\ & \left. \times \psi^{(1)}(n)\psi^{(2)}(n) + 100 \left( -\frac{N_4(n)}{(n-2)Q_2(-n)} + (1+n)N_3(-n) \ln(t) \right) (\psi^{(1)}(n))^2 \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4(n) = & 94579860375 - 340757677260n + 476780670021n^2 - 313381884398n^3 \\ & + 58617621613n^4 + 60047935964n^5 - 55248161232n^6 + 23583640288n^7 - 6295076512n^8 \\ & + 1120652288n^9 - 133587456n^{10} + 10272768n^{11} - 461568n^{12} + 9216n^{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_5(n) = & 20(1332592294636102500000 - 16320883081340462625000n \\ & + 105555357683796220200000n^2 - 443178643381779282952500n^3 \\ & + 1294743221414008032386250n^4 - 2749499385859834275944475n^5 \\ & + 4388247859746814313379570n^6 - 5401882516619757463035246n^7 \\ & + 5228360740316123330484129n^8 - 4024657793322912071684709n^9 \\ & + 2458101326221312376192956n^{10} - 1145887423610798808972312n^{11} \\ & + 337365699058317690857191n^{12} + 27603842705691047667970n^{13} \\ & - 123508438643774413812800n^{14} + 104410560705005926742848n^{15} \\ & - 60665505514752498205760n^{16} + 27682791415282378524544n^{17} \\ & - 10322914960046112751616n^{18} + 3193948740283591232512n^{19} \\ & - 824884095810479668736n^{20} + 178073674112061303808n^{21} \\ & - 32076524886655188992n^{22} + 4799168920057593856n^{23} \\ & - 591827712056901632n^{24} + 59463052826017792n^{25} \\ & - 4786110148640768n^{26} + 301036800311296n^{27} \\ & - 14247611400192n^{28} + 476995256320n^{29} \\ & - 10066329600n^{30} + 100663296n^{31}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_6(n) = & -20(-648287495048338960815000000000 + 13392152383626750903419250000000n \\
 & -129247369507507546596063262500000n^2 + 784760995249875755564992914375000n^3 \\
 & -3379418689632905894694581741625000n^4 + 10995471028942814883203534545987500n^5 \\
 & -28086548739876287905469215167337500n^6 + 57772269146827958304523075037794125n^7 \\
 & -97424718442023694367001193483703175n^8 + 136514971232536477861124150479724925n^9 \\
 & -160678587175066779762712401705570129n^{10} + 160449165246648099670622162834676867n^{11} \\
 & -137486979088728204311321448956685177n^{12} + 102744340791197086373636918999446119n^{13} \\
 & -68690943800652073919529117668244169n^{14} + 42648020110948748920511407431090852n^{15} \\
 & -25620494463431089167075670485652412n^{16} + 15218135048644653951964363930711428n^{17} \\
 & -8803387729354889770322840130296294n^{18} + 4765180115792290864302998294928032n^{19} \\
 & -2315237208516739321589151651909408n^{20} + 975621814415708934383456460440576n^{21} \\
 & -344623351870779344541897531396800n^{22} + 96526017066676020848341185755648n^{23} \\
 & -18253714514085689259008419765760n^{24} + 247214562903707211124127536128n^{25} \\
 & +1610575443361094308388891432448n^{26} - 855559242950155531756655788032n^{27} \\
 & +298448300603878925747603816448n^{28} - 81886821748446818016997343232n^{29} \\
 & +18654758903394746164653883392n^{30} - 3608347523422154112197197824n^{31} \\
 & +598579674347462805083914240n^{32} - 85480212503768045198770176n^{33} \\
 & +10506573130226808406802432n^{34} - 1107909420357849515556864n^{35} \\
 & +99621350589149028024320n^{36} - 7568486145436701163520n^{37} \\
 & +479515970554426294272n^{38} - 24875869655483285504n^{39} \\
 & +1029363978884612096n^{40} - 32674839944757248n^{41} \\
 & +747082348494848n^{42} - 10952166604800n^{43} + 77309411328n^{44}).
 \end{aligned}$$

### 3.2. Правая полуплоскость: $t > 1$

Функция  $\mathcal{F}(z)$  имеет в правой полуплоскости полюсы при  $z = 1, 2, \dots, n, \dots$ . Вычет в точке  $z = 1$  равен 0. В точках  $z = 2, 3, \dots, -n, \dots$  функция имеет полюсы второго порядка. Результат применения теоремы Коши в правой полуплоскости может быть представлен в следующем виде

$$\begin{aligned}
 A_2^{(12),5\ell}(t > 1) = & -C_0(t) - C_1(t) \ln(t) - C_2(t) \left[ \text{Li}_2 \left( \frac{1}{t} \right) \ln(t) + 2\text{Li}_3 \left( \frac{1}{t} \right) \right] \\
 & -2\sqrt{t}C_3(t) \left[ -\text{Li}_2 \left( \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1} \right) + \text{Li}_2 \left( -\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1} \right) \right] - C_4(t) \left[ \text{Li}_2 \left( 1 - \frac{1}{t} \right) \right] \left( \frac{1}{t} \right) - \Sigma_2(t).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь полиномы  $C_{i=0-4}(t)$  определяются выражениями

$$C_0(t) = \frac{70883622558731}{266252206720500} - \frac{182791845475015172936t}{4446416289769128675} - \frac{535235599785410948581t^2}{30309299206000214400} - \frac{4433264686200197t^3}{426003530752800} + \frac{126894203263979t^4}{1546235037547200} + \frac{159167403355729t^5}{80682486885000} + \frac{132757507992877t^6}{189334902556800} + \frac{418467193063t^7}{5259302848800} + \pi^2 \left( \frac{1144243120283407}{1776789726181470} + \frac{16}{25515t} - \frac{11182\sqrt{t}}{35721} - \frac{19071263524443978807649t}{1517710093574529254400} + \frac{3611375t^{3/2}}{580608} - \frac{127542544816195003487t^2}{16164959576533447680} + \frac{44741851t^{5/2}}{18662400} - \frac{53649731729992421t^3}{15904131814771200} + \frac{6439t^{7/2}}{4608} - \frac{88207166337263t^4}{824658686691840} + \frac{4752275t^{9/2}}{164602368} + \frac{710686500217643t^5}{1514679220454400} - \frac{25961273t^{11/2}}{109734912} + \frac{3359655490595t^6}{20195722939392} - \frac{211059275t^{13/2}}{2438802432} + \frac{5184823285t^7}{280496151936} - \frac{418467193063t^{15/2}}{42074422790400} \right) + \pi^4 \left( \frac{26237}{2020788} + \frac{2201}{12405393t} - \frac{153044443\sqrt{t}}{877879296} - \frac{3637619712679t}{13809041326080} + \frac{13397675t^{3/2}}{6967296} - \frac{774860233393t^2}{956010553344} + \frac{1579291t^{5/2}}{1990656} - \frac{317031301t^3}{3762339840} + \frac{442373t^{7/2}}{1161216} - \frac{655867t^4}{48771072} + \frac{6460795t^{9/2}}{877879296} + \frac{13745887t^5}{3762339840} - \frac{93034331t^{11/2}}{1609445376} + \frac{3455t^6}{1990656} - \frac{12154494155t^{13/2}}{591816056832} + \frac{85t^7}{442368} - \frac{5184823285t^{15/2}}{2243969215488} \right) + \pi^6 \sqrt{t} \left( -\frac{7135}{3538944} + \frac{73925t}{3538944} - \frac{5t^{3/2}}{486} + \frac{10255t^2}{1179648} + \frac{4795t^3}{1179648} + \frac{275t^4}{3538944} - \frac{715t^5}{1179648} - \frac{2275t^6}{10616832} - \frac{85t^7}{3538944} \right),$$

$$C_1(t) = \frac{110683021}{14777012250} - \frac{8720647901716838t}{493552701717075} - \frac{733578709161387407t^2}{87472724981241600} - \frac{882183935658967t^3}{189334902556800} + \frac{76935962876257t^4}{220890719649600} + \frac{144661753039787t^5}{135239216112000} + \frac{1680311673301t^6}{4674935865600} + \frac{418467193063t^7}{10518605697600} + \pi^4 \left( \frac{1}{486} - \frac{96603931t}{2656862208} - \frac{4575955t^2}{114960384} - \frac{125369t^3}{7962624} + \frac{1585t^4}{2322432} + \frac{21733t^5}{7962624} + \frac{295t^6}{331776} + \frac{85t^7}{884736} \right) + \pi^2 \left( \frac{16136998289}{98611928415} - \frac{292101731303201731t}{67386395541104640} - \frac{30694186029583199t^2}{9330423997999104} - \frac{140342827326277t^3}{100978614696960} + \frac{3475202862191t^4}{47123353525248} + \frac{10520064775175t^5}{40391445878784} + \frac{1147537554385t^6}{13463815292928} + \frac{5184823285t^7}{560992303872} \right),$$

$$C_2(t) = \frac{64000t}{27027} + \frac{32000\pi^2 t}{81081} - \frac{11300t^2}{18711} - \frac{4520\pi^2 t^2}{56133},$$

$$C_3(t) = -\frac{22364}{35721} + \frac{3611375t}{290304} + \frac{44741851t^2}{9331200} + \frac{6439t^3}{2304} + \frac{4752275t^4}{82301184} - \frac{25961273t^5}{54867456} - \frac{211059275t^6}{1219401216} - \frac{418467193063t^7}{21037211395200} + \pi^2 \left( -\frac{153044443}{438939648} + \frac{13397675t}{3483648} + \frac{1579291t^2}{995328} + \frac{442373t^3}{580608} + \frac{6460795t^4}{438939648} - \frac{93034331t^5}{804722688} - \frac{12154494155t^6}{295908028416} - \frac{5184823285t^7}{1121984607744} \right) - \frac{5\pi^4}{442368} \left( 1427 - 14785t - 6153t^2 - 2877t^3 - 55t^4 + 429t^5 + \frac{455t^6}{3} + 17t^7 \right),$$

$$C_4(t) = \frac{32}{6075} + \frac{13599004192t}{2191376187} + \frac{1082806535t^2}{116700507} + \frac{16688t^3}{6561} + \frac{8200t^4}{11907} + \frac{84304t^5}{1148175} + \frac{5\pi^4 t^2}{81} - \pi^2 \left( \frac{44560}{2189187} - \frac{653353744t}{730458729} - \frac{172122010t^2}{38900169} - \frac{4768t^3}{15309} - \frac{320t^4}{3969} - \frac{128t^5}{15309} \right).$$

Сумма  $\Sigma_2(t)$  определяется выражением

$$\Sigma_2(t) = \sum_{n=2}^{\infty} S_2(n, t)t^{-n}, \quad (19)$$

где

$$S_2(n, t) = \frac{1}{Q_2(n)} \left\{ \frac{20}{27(1+n)(2+n)Q_1(n)} \psi^{(1)}(n) \left[ \frac{-N_7(n)}{Q_1(n)Q_2(n)} + \frac{45(1+n)\pi^2 N_4(-n)Q_1(n)}{(2+n)Q_2(n)} + (n-1) \ln(t) \left( N_1(n) - 45(1+n)\pi^2 Q_1(n)N_3(n) \right) \right] - \frac{20(-1+n)(N_1(n) - 45(1+n)\pi^2 Q_1(n)N_3(n))}{27(1+n)(2+n)Q_1(n)} \psi^{(2)}(n) + \frac{50}{3(n+2)} \times \left[ \left( \frac{-N_4(-n)}{(2+n)Q_2(n)} - (1-n) \ln(t)N_3(n) \right) \psi^{(3)}(n) + (1-n)N_3(n)\psi^{(4)}(n) \right] + \frac{100\psi^{(1)}(n)}{(2+n)} \left[ -2(n-1)\psi^{(2)}(n)N_3(n) + \psi^{(1)}(n) \left( \frac{-N_4(-n)}{(2+n)Q_2(n)} + (n-1) \ln(t)N_3(n) \right) \right] \right\};$$

$$N_7(n) = 19510034544000000 + 276142460515200000n + 1201535076810132000n^2 + 2192527827384314400n^3 + 513590794678381950n^4 - 5686837898896160607n^5 - 12788849720872444941n^6 - 14080367078421653935n^7 - 7795982735679742935n^8 + 749488012994853855n^9 + 5604360187810145693n^{10} + 5654338453107461839n^{11} + 3454259354273080783n^{12} + 1454547630363486140n^{13} + 418256580777662196n^{14} + 67154313924030756n^{15} - 4376832940469434n^{16} - 6667379339340704n^{17} - 2370638163593120n^{18} - 540867713208064n^{19} - 89482787484096n^{20} - 11061072855552n^{21} - 1018922452480n^{22} - 68197508096n^{23} - 3142035968n^{24} - 89260032n^{25} - 1179648n^{26}.$$

#### 4. Асимптотические разложения

Приведенные выше выражения (16)–(19) определяют в явном виде точные формулы для коэффициента  $A_2^{(12),5\ell}(t)$  и позволяют провести численные расчеты соответствующих радиационных поправок с любой наперед заданной точностью. Причем, требуемая точность численных расчетов ограничена знанием экспериментально-измеренных фундаментальных физических величин  $\alpha$ ,  $m_\ell$  и  $m_L$ .

Для качественных оценок можно получить более простые выражения. Для этого исследуем поведение  $A_2^{(12),5\ell}(t)$  при  $t \ll 1$  и  $t \gg 1$ .

Для  $t \ll 1$  из формул (16)–(17) получаем

$$\begin{aligned}
 A_{2,asymp.}^{(12),5\ell}(t) \underset{t \ll 1}{=} & -\frac{\ln^5(t)}{486} - \frac{125 \ln^4(t)}{2916} + \left( -\frac{1585}{4374} - \frac{10\pi^2}{729} \right) \ln^3(t) + \ln^2(t) \left( -\frac{43045}{26244} \right. \\
 & - \frac{125\pi^2}{729} - \frac{20\zeta(3)}{81} \left. \right) + \ln(t) \left( -\frac{323065}{78732} - \frac{1585\pi^2}{2187} - \frac{2\pi^4}{81} - \frac{500\zeta(3)}{243} \right) - \frac{2182775}{472392} \\
 & - \frac{43045\pi^2}{39366} - \frac{25\pi^4}{243} - \frac{3170\zeta(3)}{729} - \frac{40}{243} \pi^2 \zeta(3) - \frac{40\zeta(5)}{27} - \frac{\pi^4 (22900736 - 28318815\pi^2) \sqrt{t}}{438939648} \\
 & + t \left[ \frac{65771}{729729} + \frac{24620\pi^2}{6561} + \frac{52\pi^4}{81} + \left( \frac{1520}{729} + \frac{40\pi^2}{243} \right) \ln^3(t) + \frac{65 \ln^4(t)}{243} + \frac{2 \ln^5(t)}{81} + \frac{6080\zeta(3)}{243} \right. \\
 & + \frac{160}{81} \pi^2 \zeta(3) + \ln^2(t) \left( \frac{12310}{2187} + \frac{260\pi^2}{243} + \frac{80\zeta(3)}{27} \right) + \ln(t) \left( \frac{132550}{6561} + \frac{3040\pi^2}{729} + \frac{8\pi^4}{27} \right. \\
 & \left. + \frac{1040\zeta(3)}{81} \right) + \frac{608480\zeta(5)}{27027} \left. \right] - \frac{25\pi^2 (-8192\pi^2 + 20699\pi^4) t^{3/2}}{774144} + t^2 \left[ \frac{8035215035}{36374184} \right. \\
 & + \frac{108290\pi^2}{6561} + \frac{275\pi^4}{243} + \frac{1220\pi^6}{5103} + \left( \frac{1375}{2916} + \frac{25\pi^2}{243} \right) \ln^4(t) - \frac{\ln^5(t)}{27} + \frac{5 \ln^6(t)}{486} + \ln^2(t) \\
 & \times \left( \frac{54145}{2187} + \frac{1375\pi^2}{729} + \frac{10\pi^4}{27} - \frac{40\zeta(3)}{9} \right) - \frac{124520\zeta(3)}{2187} - \frac{80}{27} \pi^2 \zeta(3) + \frac{400\zeta^2(3)}{27} + \ln^3(t) \\
 & \left( -\frac{31130}{6561} - \frac{20\pi^2}{81} + \frac{200\zeta(3)}{81} \right) - \frac{517040\zeta(5)}{18711} + \ln(t) \left( -\frac{2047015}{19683} - \frac{62260\pi^2}{6561} - \frac{4\pi^4}{9} \right. \\
 & \left. + \frac{5500\zeta(3)}{243} + \frac{400}{81} \pi^2 \zeta(3) + \frac{400\zeta(5)}{9} \right) \left. \right] - \frac{7\pi^2 (4096\pi^2 + 39555\pi^4) t^{5/2}}{995328} + t^3 \left[ \frac{294394858}{7381125} \right. \\
 & + \frac{303878\pi^2}{98415} + \frac{124\pi^4}{243} + \left( -\frac{1568}{2187} + \frac{80\pi^2}{729} \right) \ln^3(t) + \frac{155 \ln^4(t)}{729} + \frac{4 \ln^5(t)}{243} - \frac{6272\zeta(3)}{729} \\
 & + \frac{320}{243} \pi^2 \zeta(3) + \ln^2(t) \left( \frac{151939}{32805} + \frac{620\pi^2}{729} + \frac{160\zeta(3)}{81} \right) + \ln(t) \left( -\frac{10289768}{492075} - \frac{3136\pi^2}{2187} \right. \\
 & \left. + \frac{16\pi^4}{81} + \frac{2480\zeta(3)}{243} \right) + \frac{320\zeta(5)}{27} \left. \right] - \frac{4795\pi^6 t^{7/2}}{36864} + t^4 \left[ \frac{8901041965232}{289460658375} + \frac{71535196\pi^2}{26254935} \right. \\
 & + \frac{431\pi^4}{1323} + \left( -\frac{814187}{2000376} - \frac{50\pi^2}{567} \right) \ln^3(t) + \frac{2155 \ln^4(t)}{15876} - \frac{5 \ln^5(t)}{378} + \ln^2(t) \left( \frac{35767598}{8751645} \right. \\
 & \left. + \frac{2155\pi^2}{3969} - \frac{100\zeta(3)}{63} \right) - \frac{814187\zeta(3)}{166698} - \frac{200}{189} \pi^2 \zeta(3) + \ln(t) \left( -\frac{116371262731}{7351381800} - \frac{814187\pi^2}{1000188} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{10\pi^4}{63} + \frac{8620\zeta(3)}{1323} \Big) - \frac{200\zeta(5)}{21} \Big] - \frac{275\pi^6 t^{9/2}}{110592} + t^5 \left[ \frac{1068766096900181}{703389399851250} + \frac{3527275378\pi^2}{10633248675} \right. \\
 & - \frac{4492\pi^4}{178605} + \left( \frac{4761047}{67512690} - \frac{200\pi^2}{5103} \right) \ln^3(t) - \frac{1123 \ln^4(t)}{107163} - \frac{10 \ln^5(t)}{1701} + \ln^2(t) \left( \frac{1763637689}{3544416225} \right. \\
 & - \frac{4492\pi^2}{107163} - \frac{400\zeta(3)}{567} \Big) + \ln(t) \left( -\frac{3402468626737}{4465964443500} + \frac{4761047\pi^2}{33756345} - \frac{40\pi^4}{567} - \frac{17968\zeta(3)}{35721} \right) \\
 & \left. + \frac{9522094\zeta(3)}{11252115} - \frac{800\pi^2\zeta(3)}{1701} - \frac{800\zeta(5)}{189} \right] + \mathcal{O}(t^{11/2}). \quad (20)
 \end{aligned}$$

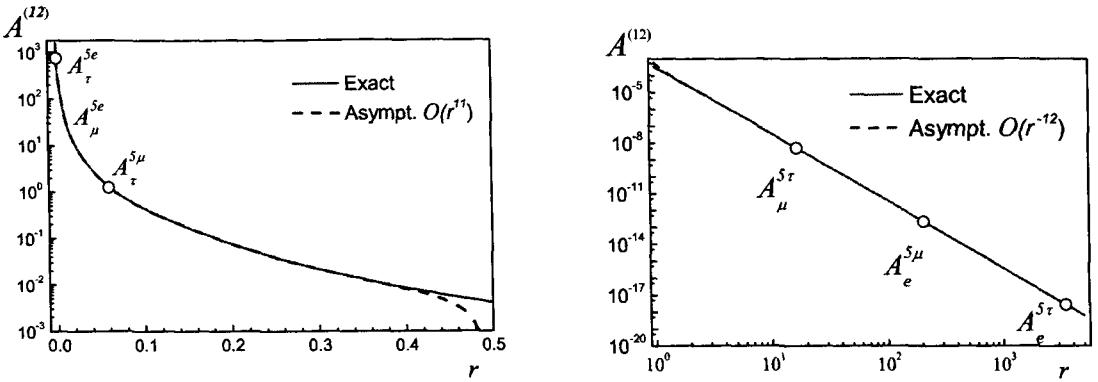


Рис. 2. Сравнение точных результатов с результатами вычислений по асимптотическим формулам. Левая панель: сплошная кривая соответствует расчету по формулам (16-17), для  $r < 1$ , пунктирная кривая соответствует асимптотическому разложению по формуле (20). Правая панель: сплошная линия – точный результат по формулам (18-19) при  $r > 1$ , пунктирная кривая соответствует асимптотическому разложению по формуле (21).

При  $t \gg 1$  из формул (18)–(19) получаем

$$\begin{aligned}
 A_{2,asymp.}^{(12),5\ell}(t) \underset{t \gg 1}{=} & \frac{1}{t^2} \left( \frac{23717113727}{10691463903120} + \frac{1216\zeta(3)}{178605} - \frac{84100\zeta(5)}{8729721} \right) + \frac{1}{t^3} \left( \frac{68782608619}{18710061830460} \right. \\
 & + \frac{3592\zeta(3)}{1528065} - \frac{23840\zeta(5)}{3741309} \Big) + \frac{1}{t^4} \left( \frac{408567816029}{85120501074840} - \frac{120118\zeta(3)}{229864635} - \frac{337720\zeta(5)}{86050107} \right) \\
 & + \frac{1}{t^5} \left( \frac{8649012016174547}{1793047592085750000} - \frac{8 \ln(t)}{50625} - \frac{102316\zeta(3)}{59594535} - \frac{165824\zeta(5)}{66927861} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^6}\right). \quad (21)
 \end{aligned}$$

На Рис. 2 приведено сравнение результатов точных расчетов с результатами разложений при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ . Из этого рисунка видно, что приближенные расчеты практически совпадают с точными в большом интервале переменной  $r$ , а именно ( $0 < r < 0.1$ ) для разложения вблизи  $r \rightarrow 0$  и ( $2 < r < \infty$ ) для разложения вблизи  $r \rightarrow \infty$ . Как было уже отмечено выше, эти два интервала полностью перекрывают все возможные значения  $r = m_\ell/m_L$  для всех возможных комбинациях масс внутренних  $\ell$  и внешних  $L$  лептонов. Это указывает на то, что выражения (20) и (21) вполне могут быть использованы не только для качественного, но и для количественного анализа поправок к аномальному магнитному моменту любого лептона ( $e$ ,  $\mu$  и  $\tau$ ) с любыми лептонными вставками.

Таблица 1: Разложения по  $t$  для  $t < 1$ .

| $t = r^2$       | Относительная точность $\varepsilon =  \text{точное-приближенное} /\text{точное}$ |                      |                       |                       |                       |
|-----------------|---|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|                 | $t^0$   | $t$                  | $t^2$                 | $t^3$                 | $t^5$                 |
| 0.1             |   |                      |                       |                       | $1.8 \cdot 10^{-3}$   |
| 0.04            |   |                      | 0.975                 | 0.012                 | $3.1 \cdot 10^{-6}$   |
| 0.01            |   | 0.555                | $5.44 \cdot 10^{-3}$  | $1.7 \cdot 10^{-5}$   | $2.7 \cdot 10^{-10}$  |
| 0.001           | 0.285   | $1.97 \cdot 10^{-3}$ | $1.8 \cdot 10^{-6}$   | $5.76 \cdot 10^{-10}$ | $9.48 \cdot 10^{-17}$ |
| 0.0001          | 0.0166  | $1.3 \cdot 10^{-5}$  | $1.07 \cdot 10^{-9}$  | $3.64 \cdot 10^{-14}$ | $2.87 \cdot 10^{-17}$ |
| $(m_e/m_\mu)^2$ | $3.45 \cdot 10^{-3}$  | $6.8 \cdot 10^{-7}$  | $1.17 \cdot 10^{-11}$ | $9.98 \cdot 10^{-17}$ | $8.84 \cdot 10^{-27}$ |

Таблица 1 демонстрирует относительную точность асимптотической формулы (20) в зависимости от числа учитываемых членов разложения. Относительная точность  $\varepsilon$  определяется как отношение

$$\varepsilon(t) = \frac{|A_{2,asympt.}^{(12),5\ell}(t) - A_{2,exact}^{(12),5\ell}(t)|}{A_{2,exact}^{(12),5\ell}(t)}$$

Отметим, что выражение для лидирующего порядка  $t^0$ , соответствующее вкладу вычета при  $z = 0$ , полностью согласуется с выражением, приведенным в работе [28]. Однако, как видно из таблицы 1, точность лидирующего порядка не велика. В таблице не приводятся значения  $\varepsilon$ , если  $\varepsilon > 1$ . Из таблицы 1 следует, что для вклада в аномальный магнитный момент мюона от поляризации вакуума пятью электронными петлями, чтобы получить точность  $\varepsilon \sim 10^{-16}$  достаточно ограничиться слагаемыми до  $t^3$  включительно.

Таблица 2. Численные значения коэффициента  $A_{2,L}^{(12)}(t = r^2)$  для физических лептонов с учетом неопределенности их масс [32].

| $r < 1$   |                          |                               |                           |
|-----------|--------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| $m_l/m_L$ | $m_e/m_\tau$             | $m_e/m_\mu$                   | $m_\mu/m_\tau$            |
| $r$       | 0.000287585(19)          | 0.00483633169(11)             | 0.0594635(40)             |
| $A_2$     | 764, 00(4)               | 58.387811(1)                  | 1.2589(4)                 |
| $r > 1$   |                          |                               |                           |
| $m_l/m_L$ | $m_\tau/m_\mu$           | $m_\mu/m_e$                   | $m_\tau/m_e$              |
| $r$       | 16.8170(11)              | 206.7682830(46)               | 3477.23(23)               |
| $A_2$     | $5.155(3) \cdot 10^{-9}$ | $2.2584123(2) \cdot 10^{-13}$ | $2.822(2) \cdot 10^{-18}$ |

В таблице 2 приведены результаты численных оценок для физических значений лептонных масс с учетом их погрешностей [32].

## 5. Заключение

В данной работе впервые получены точные аналитические выражения для поправок двенадцатого порядка к аномальному магнитному моменту лептонов ( $e$ ,  $\mu$  и  $\tau$ ) от фейнмановских диаграмм со вставками поляризационного оператора, состоящего из пяти лептонных петель. Подход основан на интегральном представлении Меллина–Барнса, которое позволяет получить аналитические выражения для соответствующих поправок во всем диапазоне изменения отношения массы лептона  $\ell$  в петле к массе внешнего лептона  $L$ ,  $r = m_\ell/m_L$ .

Полученные аналитические выражения для рассматриваемых поправок довольно громоздки. Однако, в действительности, интересующие отношения  $r$  масс физических лептонов либо  $r \ll 1$ , либо  $r \gg 1$ . Это указывает на то, что точные формулы можно заменить приближенными разложениями в пределах  $r \ll 1$  и  $r \gg 1$  и, в зависимости от желаемой точности вычислений, сохранить лишь конечное число членов разложения. Получены соответствующие асимптотические разложения и исследованы область их применимости. Показано, что они вполне пригодны в области  $0 < r < 0.1$  и  $2 < r < \infty$ .

## Acknowledgments

Проводимые исследования в большой степени поддержаны грантом сотрудничества Беларусь-ОИЯИ.

---

## References

- [1] Dirac P. A. M. The quantum theory of the electron, Proceedings of the Royal Society of London, 1927, vol. 117, pp. 610-624.
- [2] Parker R. H., Chenghui Y., Zhong W., Estey B., Muller H. Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model. Science, 2018, vol. 360, no. 6385, pp. 191-195.
- [3] Morel L., Yao Z., Clad P., Guellati-Khelifa S. Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion, Nature, 2020, vol. 588, pp. 61-65.
- [4] Abi B., Albahri T., Al-Kilani S., Allspach D., Alonzi L. P. [et al.]. (Muon g-2 Coll.) Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm, Physical Review Letter, 2021, vol. 126, art. 141801, 11 p.
- [5] Aguillard D. P. *et al.* (Muon  $g - 2$  Collaboration), Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.20 ppm, Physical Review Letter, 2013, vol. 131, art. 161802.
- [6] Jegerlehner F. The anomalous magnetic moment of the muon, Springer Tracts in Modern Physics, 2017, pp. 1-693.
- [7] Aoyama T., Asmussen N., Benayoun M., Bijnens J., Blum T., Bruno M. [et al.] The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model, Physics Reports, 2020, vol. 887, pp. 1-166.
- [8] Ignatov F. V. *et al.* Measurement of the  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  cross section from threshold to 1.2 GeV with the CMD-3 detector, E-Print:arXiv:2302.08834 [hep-ex], 2023, 52 p.

- [9] Ignatov F. V. *et al.* Measurement of the pion formfactor with CMD-3 detector and its implication to the hadronic contribution to muon ( $g - 2$ ), E-Print: arXiv:2309.12910 [hep-ex], 2023, 6 p.
- [10] Davier M., Fodor Z., Gerardin A., Lellouch L., Malaescu B., Stokes F.M. *et al.* Hadronic vacuum polarization: comparing lattice QCD and data-driven results in systematically improvable ways, Proceedings of Science Department, CERN, 1211 Geneva, 2023, 38 p.
- [11] Davier M., Hoecker A., Lutz A. M., Malaescu B., Zhang Z. Tensions in  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-(\gamma)$  measurements: the new landscape of data-driven hadronic vacuum polarization predictions for the muon  $g_\mu - 2$ , E-Print: arXiv:2312.02053 [hep-ph], 2023, 15 p.
- [12] Greynat D., de Rafael E. Hadronic Vacuum Polarization Contribution to  $g_\mu - 2$  as a function of the external lepton mass, E-Print:2311.11597 [hep-ph], 2023, 13 p.
- [13] Masjuan P., Roig P. Data-driven approximations to the Hadronic Light-by-Light scattering contribution to the muon ( $g-2$ ), E-Print: arXiv:2401.05666 [hep-ph], 2024, 5 p.
- [14] Bryzgalov V., Zenin O. A comment on the impact of CMD-3  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  cross section measurement on the SM  $g_\mu - 2$  value NRC “Kurchatov Institute” – IHEP, Protvino, Russia, E-Print: arXiv:2401.07204 [hep-ph], 2024, 24 p.
- [15] Volkov S. Calculation of the total 10-th order QED contribution to the lepton magnetic moments, E-Print: arXiv:2404.00649 [hep-ph].
- [16] Volkov S. Calculation of lepton magnetic moments in quantum electrodynamics: A justification of the flexible divergence elimination method, *Physical Review D*, 2024, vol. 109, art. 03007, 8 p.
- [17] Laporta S. High-precision calculation of the 4-loop contribution to the electron  $g - 2$  in QED, *Physics Letters B*, 1997, vol. 772, pp. 232-238.
- [18] Laporta S. High-precision calculation of the 4-loop QED contribution to the slope of the Dirac form factor, *Physics Letters B*, 2020, vol. 800, pp. 135-137.
- [19] Aguilar J. P., de Rafael E., Greynat D. Muon anomaly from lepton vacuum polarization and the Mellin-Barnes representation, *Physical Review D*, 2008, vol. 77, art. 093010, 27 p.
- [20] Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P. Lepton anomaly from QED diagrams with vacuum polarization insertions within the Mellin– Barnes representation, *Eur. Phys. J. Plus*, 2023, vol. 138, no.3, art. 212, 20 p.
- [21] Dubovyk I., Gluza J, Somogyi G., Mellin-Barnes Integrals: A Primer on Particle Physics Applications, *Lect. Notes Phys.*, 2022, vol. 1008, 208 p.
- [22] Smirnov V. A., *Analytic tools for Feynman integrals*, Springer Tracts in Modern Physics, 2012, vol. 250, 296 p.
- [23] Boos E. E., Davydychev A. I. A Method of evaluating massive Feynman integrals, *Theor. Math. Phys.*, 1991, vol. 89, pp. 1052-1063.
- [24] Friot S., Greynat D., de Rafael E. Asymptotics of Feynman diagrams and the Mellin-Barnes representation, *Physics Letters B*, 2005, vol. 628, pp. 73-84.
- [25] Solovtsova O., Lashkevich V., Kaptari L. Contributions of QED diagrams with vacuum polarization insertions to the lepton anomaly within the Mellin–Barnes representation, *Phys. Part. Nucl.*, 2024, vol. 55, no. 4, pp. 725-730.
- [26] Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P. Analytical calculations of the tenth order QED radiative corrections to lepton anomalies within the Mellin–Barnes representation, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2024, vol. 51, art. 055001, 20 p.
- [27] Schwinger J. S. Quantum electrodynamics. III: The electromagnetic properties of the electron: radiative corrections to scattering. *Physical Review*, 1949, vol. 76, pp. 790-817.

- [28] Laursen M. L., Samuel M. A. The  $n$ -bubble diagram contribution to  $g - 2$  of the electron mathematical structure of the analytical expression, *Physics Letters B*, 1980, vol. 91B, pp. 249 - 252 ; Laursen M. L., Samuel M. A. The  $n$ -bubble diagram contribution to  $g - 2$ . *Journal of Mathematical Physics*, 1981, vol. 22, pp. 1114-1126.
- [29] Lautrup B. E. On high order estimates in QED, *Physical Letter B*, 1977, vol. 69, pp. 109-111.
- [30] Lashkevich V. I., Solovtsova O. P., Teryaev O. V. On high order contributions to the anomalous magnetic moments of leptons due to the vacuum polarization by lepton loops. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 412-423.
- [31] Sidorov A. V., Lashkevich V. I., Solovtsova O. P. On the contribution of muon loops to the anomalous magnetic moment of the muon, *Nonlin. Phenom. Complex Syst.*, 2018, vol. 21, no. 4, pp. 395-401.
- [32] Tiesinga E., Mohr P. J., Newell D. B., Taylor B. N. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018, *Reviews of Modern Physics*, 2021, vol. 93, art. 025010.