Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Б. Н. ДЕЛОНЕ

О РОСТЕ ДИСКРИМИНАНТОВ ПОЛЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ДАННОЙ СТЕПЕНИ

Перенумеруем поля алгебраических чисел данной степени n и сигнатуры τ в порядке неубывания абсолютной величины их дискриминантов D_m. Мы докажем, что не может быть, чтобы начиная с некоторого $m = m_0$ все время было

$$|D_m| < Am^{\frac{4}{n+2}-\varepsilon},$$

где m — номер поля, A — некоторая постоянная, а ε — любое (сколь угодно малое) зафиксированное положительное число. Для упрощения изложения мы будем рассматривать только случай чисто вещественных полей K_1, $K_2, \ldots, K_m, \ldots$ простой степени n, но совершенно аналогичный результат получается для полей любой степени и любой сигнатуры.

Совокупность целых точек каждого из полей K_m представляет в n-мерном пространстве корней n-мерную решетку O_m. Обозначим через W_n^* совокупность всех точек всех этих решеток. В силу выведенной мною асимптотической формулы (¹) число точек W_n^*, лежащих внутри n-мерного шара радиуса r с центром в начале координат пространства корней, не больше чем

$$\nu \cdot r^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

где ν — некоторая постоянная, зависящая от n.

Все решетки O_m имеют общими целые рациональные точки $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Если спроектировать систему W_n^* параллельно рациональному направлению на $(n-1)$-мерную плоскость нулевого следа $s = 0$, то в этой плоскости получится некоторая дискретная система точек $\overline{W}_n^*$, составленная из всех тех $(n-1)$-мерных решеток $\overline{O}_m$, которые суть проекции решеток O_m.

Рассмотрим в $(n-1)$-мерной плоскости $s = 0$ $(n-1)$-мерный круг K радиуса r с центром в начале и построим на нем n-мерный цилиндр, осью которого является рациональная прямая, для которого этот круг является „экваториальным кругом" и высота которого равна $2r$, т. е. цилиндр, вписанный в n-мерный шар с центром в начале и радиусом $r\sqrt{2}$. Число точек системы W_n^* в этом шаре, а следовательно, и подавно в этом цилиндре, не больше чем $\nu(r\sqrt{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$. А так как вся совокупность точек W_n^* составлена из линейных рядов, равных и параллельных ряду целых рациональных точек ..., $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, расстояние между соседними из которых равны $\sqrt{n}$, и все точки всякого такого ряда проектируются на плоскость $s=0$ в одну точку, то число точек $\overline{W}_n^*$, лежащих внутри круга K, не больше чем $\nu(r\sqrt{2})^{\frac{n(n+1)}{1}} \frac{1}{2r/\sqrt{n}-1}$, т. е. не больше чем

$$Br^{\frac{n(n+1)}{2}-1}, \tag{1}$$

где B — некоторая постоянная, зависящая только от n.

Если n простое, то поля K_m попарно не имеют общих подполей, кроме рационального поля, и, следовательно, решетки O_m попарно не имеют общих точек, кроме целых рациональных точек, и их проекции $\overline{O}_m$ попарно не имеют общих точек, кроме точки O, общей им всем.

Дискриминант D_m поля K_m равен, как известно, квадрату объема v_m основного параллелепипеда решетки O_m, т. е. $D_m = v_m^2$, а $(n-1)$-мерный объем $\overline{v}_m$ основного параллелепипеда проекции $\overline{O}_m$ решетки O_m на плоскость $s=0$ параллельно рациональному направлению равен $v_m / \sqrt{n}$, и поэтому $\overline{v}_m = \sqrt{D_m} / \sqrt{n}$.

Используем теперь лемму, состоящую в том, что число точек любой n-мерной решетки, одна из точек которой лежит в центре n-мерного шара, лежащих в этом шаре, больше чем $C\frac{v}{v_0}$, где v — объем этого шара, v_0 — объем основного параллелепипеда этой решетки, а C — некоторая постоянная, зависящая только от n. Для частного случая решетки, построенной на прямоугольном основном параллелепипеде, лемма эта очевидна, если вписать в шар n-мерный куб с гранями, параллельными граням этого параллелепипеда. Для произвольной решетки она следует из того, что, как известно (см., например, ([2])), в произвольной решетке всегда существует основной параллелепипед, сравнительно мало отличающийся от прямоугольного.

В силу этой леммы число точек решетки $\overline{O}_m$, лежащих в круге K, больше чем $\frac{C\gamma r^{n-1}\sqrt{n}}{\sqrt{D_m}}$, где γ — объем $(n-1)$-мерного шара радиуса 1, т. е. число это больше или равно $\left[\frac{\overline{C}r^{n-1}}{\sqrt{D_m}} + 1\right]$, где $\overline{C} = C\gamma\sqrt{n}$, а $[\ \ ]$ — знак наибольшей целой части. Принимая во внимание, что точка O общая всем решеткам $\overline{O}_m$, и то, что сами эти решетки попарно не имеют никаких других общих точек, мы получим, что число точек системы $\overline{W}_n^*$, лежащих в круге K, больше чем

$$\sum = \left[\frac{\overline{C}r^{n-1}}{\sqrt{D_1}}\right] + \left[\frac{\overline{C}r^{n-1}}{\sqrt{D_2}}\right] + \ldots + \left[\frac{\overline{C}r^{n-1}}{\sqrt{D_t}}\right],$$

где t есть наибольшее натуральное число, при котором $\frac{\overline{C}r^{n-1}}{\sqrt{D_t}} \geqslant 1$. Учитывая неравенство (1), мы получаем неравенство:

$$\sum < Br^{\frac{n(n+1)}{2}-1}. \tag{2}$$

Предположим теперь, что α — некоторое положительное число меньшее чем 1 и что, начиная с некоторого $m = m_0$, все

$$D_m < Am^{2\alpha}.$$

Рассмотрим тогда такую постоянную $\overline{A} \geqslant A$, что и все D_m для $m < m_0$ тоже меньше чем $\overline{A}m^{2\alpha}$; тогда для такой $\overline{A}$ уже будет:

$$D_m < \overline{A}m^{2\alpha}$$

при любых m, и мы будем тогда иметь

$$\sum \geqslant \sum{}' = \left[\frac{\overline{C}r^{n-1}}{b}\right] + \left[\frac{\overline{C}r^{n-1}}{b \cdot 2^{\alpha}}\right] + \ldots + \left[\frac{\overline{C}r^{n-1}}{b \cdot t'^{\alpha}}\right], \qquad (3)$$

где $b = \sqrt{\overline{A}}$ и t' — наибольшее натуральное число, при котором $\frac{\overline{C}r^{n-1}}{b \cdot t'^{\alpha}} \geqslant 1$, потому что каждое из слагаемых суммы Σ' меньше или равно соответственному слагаемому суммы Σ и число их t' меньше или равно числу t слагаемых суммы Σ.

Наибольшее слагаемое q суммы Σ' есть, очевидно, первое ее слагаемое, т. е. $q = \left[\frac{\overline{C}r^{n-1}}{b}\right]$, и все ее слагаемые — натуральные числа.

Преобразуем сумму Σ'. Число m_1 таких слагаемых суммы Σ', которые больше или равны 1, будет наибольшее натуральное число m_1 такое, при котором $\frac{\overline{C}r^{n-1}}{bm_1^{\alpha}} \geqslant 1$, т. е. наибольшая целая часть числа $\left(\frac{\overline{C}}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{n-1}{\alpha}}$, т. е. $m_1 > \left(\frac{\overline{C}}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{n-1}{\alpha}} - 1$. Число m_2 таких слагаемых суммы Σ', которые больше или равны 2, будет наибольшее натуральное число m_2 такое, при котором $\frac{\overline{C}r^{n-1}}{bm_2^{\alpha}} \geqslant 2$, т. е. наибольшая целая часть числа $\left(\frac{\overline{C}}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{n-1}{\alpha}} \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$, т. е. $m_2 > \left(\frac{\overline{C}}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{n-1}{\alpha}} \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} - 1$. Аналогично получим, что $m_3 > \left(\frac{\overline{C}}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{n-1}{\alpha}} \frac{1}{3^{\frac{1}{\alpha}}} - 1$ и т. д. Но $\Sigma' = m_1 + m_2 + \ldots + m_q$, и, следовательно, мы получаем:

$$\sum{}' = \left(\frac{\overline{C}}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{n-1}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{\alpha}}} + \ldots + \frac{1}{q^{\frac{1}{\alpha}}}\right) - q.$$

Ввиду того, что мы предполагаем, что $0 < \alpha < 1$, т. е. что $\frac{1}{\alpha} > 1$, ряд $1, \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}, \frac{1}{3^{\frac{1}{\alpha}}}, \ldots, \frac{1}{q^{\frac{1}{\alpha}}}$ сходится. При достаточно больших r число $q = \left[\frac{\overline{C}r^{n-1}}{b}\right]$ сколь угодно большое и, следовательно, сумма в скобках сколь угодно мало отличается от полной суммы C_{α} этого ряда. Мы получаем, следовательно, что при достаточно больших r имеет место неравенство

$$\sum{}' > \left(\frac{\overline{C}}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{n-1}{\alpha}} C' - \frac{\overline{C}}{b} r^{n-1},$$

где C'_{α} — зафиксированная постоянная, меньшая чем C_{α} $\Big($вычитаемое число q мы здесь заменили бо́льшим числом $\frac{\overline{C}}{b}\, r^{n-1}\Big)$.

Принимая во внимание неравенства (2) и (3), мы получаем неравенство:

$$\left(\frac{\overline{C}}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} C'_\alpha r^{\frac{n-1}{\alpha}} - \frac{\overline{C}}{b} r^{n-1} < B r^{\frac{n(n+1)}{2}-1},$$

верное для любых достаточно больших r. Учитывая, что $0 < \alpha < 1$, мы отсюда получаем

$$\frac{n-1}{\alpha} \leqslant \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

или

$$\alpha \geqslant \frac{2}{n+2},$$

а это и доказывает высказанную в начале теорему.

Поступило
13 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, Теория иррациональностей третьей степени, М. — Л., 1940. [2] Б. Н. Делоне, Усп. матем. наук, 3, 51 (1937).