

В. М. ГЛУШКОВ

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕКОММУТАТИВНЫХ
ЛОКАЛЬНО-БИКОМПАКТНЫХ ГРУПП**

(Представлено академиком П. С. Александровым 3 III 1954)

Настоящая заметка посвящена изучению локально-бикомпактных локально-нильпотентных групп. При этом, следуя принятой в общей теории групп терминологии, мы называем топологическую группу локально-нильпотентной, если любое конечное множество ее элементов порождает нильпотентную подгруппу (¹), стр. 407). Здесь и ниже порождение топологической группы некоторым множеством ее элементов понимается в алгебраическом смысле. В частности, топологическая группа называется бикомпактно-порождаемой, если она порождается некоторым своим бикомпактным подмножеством.

Элемент g топологической группы G называется бикомпактным, если порожденная им циклическая подгруппа обладает бикомпактным замыканием и p -элементом (p — простое число), когда любая окрестность единицы группы G содержит почти все элементы последовательности $g, g^p, g^{p^2}, \dots, g^{p^n}, \dots$ (^{2, 3}).

Топологическую группу будем называть чистой, если она не содержит отличных от единицы бикомпактных элементов, и периодической, если все ее элементы бикомпактны. Группой без кручения называется группа, не содержащая отличных от единицы элементов конечного порядка.

Далее, пусть G — топологическая группа, а индекс α пробегает некоторый отрезок множества порядковых чисел.

Нулевым гиперцентром Z_0 группы G назовем единичную подгруппу $\{e\}$. Если все гиперцентры Z_α с номерами $\alpha < \beta$ уже определены, то β -й гиперцентр Z_β совпадает с множеством элементов $z \in G$, удовлетворяющих соотношению $z^{-1}g^{-1}zg \in Z_{\beta-1}$ для любого $g \in G$ в случае, если β есть число предельное, и совпадает с объединением всех гиперцентров, имеющих меньшие чем β номера, в случае, если число β предельное. Известно (¹), что гиперцентры являются инвариантными подгруппами. В случае топологических групп некоторые гиперцентры могут оказаться незамкнутыми, хотя, как нетрудно показать, гиперцентры, имеющие натуральные номера, всегда замкнуты.

Если группа совпадает с некоторым своим гиперцентром, то она называется ZA -группой (¹). Всякая ZA -группа локально-нильпотентна (⁴).

Теорема 1. *В произвольной локально-нильпотентной топологической группе множество всех бикомпактных элементов является инвариантной подгруппой.*

Таким образом, для произвольной локально-нильпотентной группы G можно говорить о подгруппе всех ее бикомпактных элементов. Это обстоятельство хорошо известно в двух частных случаях,

а именно в случаях, когда группа G коммутативна или дискретна. Подгруппа всех бикомпактных элементов произвольной локально-нильпотентной группы может оказаться незамкнутой. Дело, однако, меняется, если ограничиться рассмотрением локально-бикомпактных групп, для которых имеет место следующая теорема:

Теорема 2. В локально-нильпотентной локально-бикомпактной группе G подгруппа B всех бикомпактных элементов замкнута в G и определяет чистую фактор-группу G/B .

Всякая чистая локально-бикомпактная локально-нильпотентная недискретная группа обладает недискретным центром. Точнее говоря, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Связная компонента единицы K чистой локально-бикомпактной локально-нильпотентной группы G содержится в гиперцентре группы G , имеющем натуральный номер, и является связной односвязной нильпотентной группой Ли. Фактор-группа G/K есть дискретная локально-нильпотентная группа без кручения. Иными словами, G есть чистая локально-нильпотентная группа Ли.

Теорема 4. Все гиперцентры чистой локально-бикомпактной локально-нильпотентной группы G замкнуты в G и определяют чистые фактор-группы.

Теорема 5. Всякая связная локально-нильпотентная локально-бикомпактная группа нильпотентна.

Локальная структура нильпотентных связных локально-бикомпактных групп определяется теоремой 2 из работы А. И. Мальцева ⁽⁶⁾. Структура же таких групп „в целом“ описывается следующей теоремой:

Теорема 6. Всякая связная нильпотентная локально-бикомпактная группа G изоморфна фактор-группе $(L \times B)/C$, где B есть связная бикомпактная коммутативная группа, изоморфная подгруппе всех бикомпактных элементов группы G ; L — некоторая связная односвязная нильпотентная группа Ли, а C — некоторая замкнутая центральная подгруппа прямого произведения $L \times B$, пересекающаяся с B по единичной, а с L — по дискретной подгруппе.

Как известно ^(2, 5), в коммутативном случае подгруппа C может быть сведена к единичной подгруппе. В общем же случае подгруппа C , по которой производится „склеивание“ прямого произведения $L \times B$, должна предполагаться, вообще говоря, даже недискретной. В этом легко убедиться на соответствующих примерах (см., например, ⁽⁷⁾, § 4). Таким образом, описание связных нильпотентных локально-бикомпактных групп, даваемое теоремой 6, повторяет „с точностью до склеивания“ известную понтрягинскую конструкцию, имеющую место в частном, коммутативном случае, причем процесс „склеивания“ здесь, вообще говоря, неустраним по самому существу дела.

Строение произвольных локально-бикомпактных локально-нильпотентных групп также в значительной мере повторяет коммутативный случай. Оно описывается следующей теоремой:

Теорема 7. Пусть G есть локально-бикомпактная локально-нильпотентная группа, K — связная компонента ее единицы, B — подгруппа всех бикомпактных элементов группы G . Тогда справедливы следующие утверждения: а) нормальный делитель $N = KB$ открыт в G , а определяемая им фактор-группа G/N есть дискретная локально-нильпотентная группа без кручения; б) группа N топологически изоморфна фактор-группе $(L \times B)/C$, где L есть некоторая связная односвязная нильпотентная группа Ли (определяемая группой G однозначно с точностью до прямого множи-

теля, являющегося векторной группой), а C есть замкнутая (вообще говоря, не дискретная) центральная подгруппа прямого произведения $L \times B$, пересекающаяся с B по единичной, а с L — по дискретной подгруппе.

Теорема 8. Локально-бикомпактная локально-нильпотентная группа тогда и только тогда является группой Ли, когда подгруппа всех ее бикомпактных элементов является группой Ли.

Теоремы 7 и 8 показывают, что свойства произвольных локально-бикомпактных локально-нильпотентных групп в значительной мере определяются свойствами их максимальных периодических подгрупп. Поэтому представляет значительный интерес исследование специального случая периодических локально-бикомпактных локально-нильпотентных групп.

Теорема 9. Всякая периодическая локально-бикомпактная локально-нильпотентная группа обладает открытыми бикомпактными подгруппами.

Вместе с тем нетрудно построить пример периодической локально-бикомпактной локально-нильпотентной группы, не имеющей ни одного открытого бикомпактного нормального делителя.

Теорема 10. Связная компонента единицы любой периодической локально-бикомпактной локально-нильпотентной группы бикомпактна и содержится в центре этой группы.

Теорема 11. Всякая нульмерная периодическая локально-бикомпактная локально-нильпотентная группа G с отмеченной в ней произвольной открытой бикомпактной подгруппой разлагается в прямое произведение топологических p -групп по различным простым числам p (в смысле Н. Я. Виленкина⁽⁸⁾).

В двух частных случаях, коммутативном и дискретном, теорема 11 превращается в хорошо известные предложения^(1,8).

На основании развитой теории особо изучаются некоторые специальные свойства локально-бикомпактных бикомпактно-порождаемых групп.

Теорема 12. Подгруппа всех бикомпактных элементов локально-нильпотентной бикомпактно-порождаемой локально-бикомпактной группы G бикомпактна.

Теорема 13. Всякая замкнутая подгруппа локально-нильпотентной локально-бикомпактной бикомпактно-порождаемой группы является также бикомпактно-порождаемой группой.

Теорема 14. Всякая локально-нильпотентная локально-бикомпактная бикомпактно-порождаемая группа является проективным пределом нильпотентных групп Ли.

Следствие. Всякая локально-нильпотентная локально-бикомпактная группа есть обобщенная группа Ли, т. е. содержит открытую подгруппу, являющуюся проективным пределом группы Ли⁽⁹⁾.

Вместе с тем построены примеры, с одной стороны, нильпотентной локально-бикомпактной группы, а с другой стороны, разрешимой локально-бикомпактной бикомпактно-порождаемой группы, не являющихся проективными пределами групп Ли.

Последняя группа вопросов касается различных условий нильпотентности бикомпактно-порождаемых групп.

Теорема 15. Локально-бикомпактная бикомпактно-порождаемая ZA -группа нильпотентна.

Эта теорема обобщает один из результатов работы А. И. Мальцева⁽⁴⁾.

Теорема 16. Локально-нильпотентная локально-связная группа, порождаемая некоторой бикомпактной окрестностью своей единицы, нильпотентна.

Теорема 17. *Локально-нильпотентная локально-бикомпактная бикомпактно-порождаемая группа тогда и только тогда нильпотента, когда нильпотентна ее максимальная бикомпактная подгруппа.*

Вместе с тем построен пример бикомпактной локально-нильпотентной группы без центра.

Отметим еще некоторые вспомогательные предложения, имеющие известное самостоятельное значение:

Лемма 1. *Если бикомпактно-порождаемая группа удовлетворяет первой аксиоме счетности, то она удовлетворяет также и второй аксиоме счетности.*

Лемма 2. *В недискретной локально-бикомпактной локально-нильпотентной группе централизатор любого конечного подмножества недискретен.*

Лемма 3. *В локально-нильпотентной группе замыкание подгруппы, порожденной любым конечным множеством бикомпактных элементов, бикомпактно.*

Лемма 4. *В локально-нильпотентной группе элементы любого конечного множества однопараметрических и циклических подгрупп порождают нильпотентную подгруппу.*

Лемма 5. *В локально-нильпотентной группе G централизатор любого бикомпактного элемента содержит все однопараметрические подгруппы группы G .*

Лемма 6. *Если топологическая группа G является произведением двух своих замкнутых подгрупп A и B , по крайней мере одна из которых бикомпактна, то отображение $(a, b) \rightarrow ab$ топологического произведения пространств A и B на пространство G является непрерывным и открытым.*

Уральский
лесотехнический институт

Поступило
2 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Г. Курош, Теория групп, М., 1953. ² Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М. — Л., 1938. ³ А. Г. Курош, Изв. АН СССР, сер. матем., 9:2, 65 (1945). ⁴ А. И. Мальцев, там же, 13, 201 (1949). ⁵ А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применение, М., 1950. ⁶ А. И. Мальцев, Матем. сборн., 19 (61): 2, 165 (1946). ⁷ К. Iwasawa, Ann. of Math., 50:3, 507 (1949). ⁸ Н. Я. Виленкин, Матем. сборн., 19 (61), 85 (1946). ⁹ А. М. Gleason, Duke Math. J., 18, 1, 85 (1951).