Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 1

МЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

О ПРИЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО К ДИНАМИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 19 II 1954)

Хорошо известны приложения теории функций комплексного переменного к плоским задачам гидродинамики [1] и теории упругости [2]. Естественно возникает вопрос об использовании аналитических функций в динамике материальной точки.

Целью настоящего сообщения является изложение наших результатов по данному вопросу. В конце мы укажем более общие системы с двумя степенями свободы, для которых излагаемые ниже результаты также имеют место, а сейчас рассмотрим для большей ясности систему уравнений движения материальной точки во вращающихся осях:

$$\ddot{x} = U_x + 2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = U_y - 2\omega\dot{x}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают интеграл энергии

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(U + h), \quad h = \text{const}. \tag{2}$$

Поставим задачу о построении нового интеграла

$$P\dot{x}^2 + 2Q\dot{x}\dot{y} + R\dot{y}^2 + S\dot{x} + T\dot{y} = K. \tag{3}$$

В курсе аналитической динамики Е. Т. Уиттекера [3] утверждается, что в случае абсолютного движения ($\omega = 0$) интеграл (3) существует т о г д а и т о л ь к о т о г д а, когда живую силу и потенциал приложенных сил U при помощи перехода к эллиптическим координатам можно привести к виду Лиувилля. Случай относительного движения Е. Т. Уиттекер не рассматривает.

Ниже будет показано, что уравнения (1) в с е г д а допускают, помимо (2), интеграл (3). Несовпадение наших выводов с результатом Уиттекера объясняется просто: Уиттекер не учитывает в своем анализе интеграл энергии. Если же этот интеграл учитывать, то оказывается, что интеграл (3) всегда имеет место. Больше того, при таком подходе к задаче о новом интеграле устанавливается связь проблемы интегрирования уравнений движения (1) с функциями комплексного переменного.

Т е о р е м а 1. *Система дифференциальных уравнений* (1) *всегда допускает линейный интеграл*

$$S\dot{x} + T\dot{y} = K. \tag{4}$$

Действительно, в силу уравнений (1) имеем:

$$SU_x + TU_y + \dot{x}^2 S_x + \dot{x}\dot{y}(S_y + T_x) + \dot{y}^2 T_y = \dot{x}(K_x + 2\omega T) + \dot{y}(K_y - 2\omega S). \tag{5}$$

Выберем функции S и T так, чтобы выполнялись уравнения

$$S_x = T_y, \quad S_y = -T_x. \tag{6}$$

Тогда, в силу интеграла энергии, будем иметь

$$(K_x + 2\omega T)\dot{x} + (K_y - 2\omega S)\dot{y} = f,\ f = SU_x + TU_y + (S_x + T_y)(U + h). \tag{7}$$

Уравнения (2), (4) и (7) должны быть совместимы, т. е. если мы определим из (4) и (7) проекции скорости

$$\dot{x} = -\frac{fT - K(K_y - 2\omega S)}{SK_y - TK_x - 2\omega(S^2 + T^2)}, \quad \dot{y} = \frac{fS - K(K_x + 2\omega T)}{SK_y - TK_x - 2\omega(S^2 + T^2)} \tag{8}$$

и подставим их значения в интеграл (2), то должны получить тождество. Отсюда следует уравнение для определения K:

$$[fT - K(K_y - 2\omega S)]^2 + [fS - K(K_x + 2\omega T)]^2 = \\ = 2(U + h)[SK_y - TK_x - 2\omega(S^2 + T^2)]^2. \tag{9}$$

Из уравнений (6) мы видим, что $S = \operatorname{Re} F(z)$, $T = \operatorname{Im} F(z)$, где $z = x + iy$, а $F(z)$ — аналитическая функция. Ее можно задать произвольно (этим можно воспользоваться для упрощения уравнения (9), определяющего функцию K). Теорема доказана.

Замечание. Может случиться, что для $\omega = 0$, $K = c = \text{const}$ и некоторого фиксированного значения $h = h_0$ равенство (7) при надлежащем выборе функции $F(z) = S + iT$ обращается в тождество. Тогда имеем интеграл $\operatorname{Re} \dot{\bar{z}} F(z) = c$.

Пример. Рассмотрим движение под действием центральной силы, обратно пропорциональной пятой степени расстояния,

$$\ddot{x} = -\mu\frac{x}{r^6}, \quad \ddot{y} = -\mu\frac{y}{r^6}, \quad \mu = \text{const}.$$

Пусть $h_0 = 0$, $F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Тогда $f \equiv 0$. Следовательно, имеем интеграл $(x^2 - y^2)\dot{x} + 2xy\dot{y} = c$. Наличие двух интегралов позволяет легко найти траекторию:

$$c^2(x^4 + y^4) + 2x^2y^2(2c_1^2 - c^2) + 2cc_1y(x^2 + y^2) + x^2\left(c^2 - \frac{\mu}{2}\right) + y^2c_1^2 = 0.$$

Теорема 2. *Уравнения движения $\ddot{x} = U_x$, $\ddot{y} = U_y$ всегда допускают, помимо интеграла энергии, квадратичный интеграл*

$$P\dot{x}^2 + 2Q\dot{x}\dot{y} + R\dot{y}^2 = K = \text{const}. \tag{10}$$

В самом деле, подчиним функции P, Q, R следующим условиям:

$$(P - R)_x = 2Q_y, \quad (P - R)_y = -2Q_x, \tag{11}$$

т. е. пусть функция $P - R + 2iQ \equiv \varphi + i\psi$ будет аналитической. Тогда будем иметь, в силу уравнений движения и интеграла энергии

$$A\dot{x} + B\dot{y} = 0, \tag{12}$$

$$A = [P(U + h)]_x + QU_y, \quad B = [R(U + h)]_y + QU_x. \tag{13}$$

Уравнения (2), (10) и (12) должны быть совместимы. Рассмотрим два случая: 1) $K = 0$, 2) $K \neq 0$.

В первом случае условие совместимости имеет вид

$$PB^2 - 2QAB + RA^2 = 0. \tag{14}$$

Во втором случае без ущерба для общности можно считать $K = 1$. Условие совместимости в этом случае имеет вид

$$\frac{A^2 + B^2}{PB^2 - 2QAB + RA^2} = 2(U + h). \tag{15}$$

При помощи аналитической функции $\varphi + i\psi$ мы определяем $P - R = \varphi$, $Q = {}^1/_2\,\psi \neq 0$. Уравнение (14), в случае $K = 0$, или (15), в случае $K = 1$, определяет $\vartheta = P + R$. После определения функции $\vartheta(x, y, c), c = \text{const}$, траектории находятся интегрированием уравнения (12):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{[(\vartheta + \varphi)(U + h)]_x + \psi U_y}{[(\vartheta - \varphi)(U + h)]_y + \psi U_x}. \tag{16}$$

Интеграл (10) будет новым, так как $Q \neq 0$.

Теорема 3. *Если область $U + h \geqslant 0$ конечная, ограниченная простой замкнутой кривой, то дифференциальные уравнения* (1) *допускают, помимо* (2), *интеграл* (3).

Пусть коэффициенты искомого интеграла удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(P - R)_x = 2Q_y, \quad (P - R)_y = -2Q_x; \tag{17}$$

$$S_x - T_y = 8\omega Q, \quad S_y + T_x = -4\omega(P - R). \tag{18}$$

Тогда результат дифференцирования равенства (3) с последующим использованием уравнений (1) и интеграла (2) дает:

$$A\dot{x} + B\dot{y} = C, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} A = K_x - 2\{[P(U + h)]_x + QU_y - \omega T\}, \\ B = K_y - 2\{[R(U + h)]_y + QU_x + \omega S\}, \\ C = SU_x + TU_y + (S_x + T_y)(U + h). \end{gathered} \tag{20}$$

Уравнения (2), (3) и (19) должны быть совместимы. Отсюда следует:

$$(Ln - Nl)^2 = (Mn - Nm)(Lm - Ml), \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} L = KA^2 - PC^2 - SAC, \quad N = KB^2 - RC^2 - TBC, \\ M = 2(KAB - QC^2) - C(AT + BS), \\ l = 2A^2(U + h) - C^2, \quad m = 4AB(U + h), \quad n = 2B^2(U + h) - C^2. \end{gathered} \tag{22}$$

Уравнения (17) удовлетворяются, если

$$P = {}^1/_2(\vartheta + \varphi), \quad Q = {}^1/_2\,\psi, \quad R = {}^1/_2(\vartheta - \varphi), \quad \varphi + i\psi = F(z). \tag{23}$$

Далее положим

$$S = u + \alpha_x + \beta_y, \quad T = v + \beta_x - \alpha_y, \quad u + iv = G(z). \tag{24}$$

Тогда уравнения (18) будут удовлетворены, если

$$\alpha = -\frac{2}{\pi}\iint\limits_{U+h\geqslant 0} \omega\psi \ln\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta, \quad \beta = \frac{2}{\pi}\iint\limits_{U+h\geqslant 0} \omega\varphi \ln\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta. \tag{25}$$

Остаются неизвестными функции ϑ и K. Для их определения имеем одно уравнение (21). Поэтому можем произвольно установить связь между ϑ и K, например, можем положить $K = \text{const}$.

Обобщение. *Динамическая система с двумя степенями свободы, имеющая кинетический потенциал*

$$L_2 + L_1 + L_0 \equiv \frac{1}{2}\sum_{k,\,l}^{1,\,2} g_{kl}\,\dot{q}_k\dot{q}_l + 2\sum_{k=1}^{2} g_k\dot{q}_k + U, \tag{26}$$

не зависящий явно от времени, всегда допускает линейный интеграл. Если $\Omega = \frac{\partial g_2}{\partial q_1} - \frac{\partial g_1}{\partial q_2} = 0$, *то система всегда допускает, помимо* *интеграла* $L_2 = L_0 + h$, *однородный квадратичный интеграл. Если* $\Omega \neq 0$, *то в случае, когда область* $L_0 + h \geqslant 0$ *в результате изотермического преобразования, при котором* $L_2 = {}^1/_2 \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, *переходит в конечную, ограниченную простой замкнутой кривой, система допускает неоднородный квадратичный интеграл.*

Для доказательства следует выполнить переход к изотермическим координатам (это связано с интегрированием уравнений Бельтрами, которые являются обобщением уравнений Даламбера — Эйлера) и сделать подстановку $dt = \mu\, d\tau$.

В качестве примера рассмотрена задача о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (после исключения циклической скорости). Коэффициенты нового интеграла алгебраически не выражаются через направляющие косинусы вертикали, что, естественно, согласуется с классическими результатами [4].

Среднеазиатский
государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
2 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М.—Л., 1950. [2] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М. Л., 1949. [3] Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, М.—Л., 1937. [4] В. В. Голубев, Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1953.