**Доклады Академии Наук СССР**
**1954. Том XCVI, № 1**

*МАТЕМАТИКА*

В. Ф. НИКОЛАЕВ

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

*(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 III 1954)*

1. Рассматривается линейная операция $U_{n,m}(x; f)$ из $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$, обладающая свойствами:

а) операция $U_{n,m}$ переводит элементы пространства $\widetilde{C}$ в некоторые тригонометрические полиномы порядка $\leqslant n+m-1$ ($n$ и $m$ — данные натуральные числа);

б) операция $U_{n,m}$ оставляет неизменным любой тригонометрический полином порядка $\leqslant n$. ($\widetilde{C}$ означает пространство непрерывных вещественных $2\pi$-периодических функций с нормой $\|f(x)\| = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)|$.)

Примером такой операции может служить «средняя Валле-Пуссена»:

$$S_{n,m}(x; f) = \frac{1}{m}(S_n + S_{n+1} + \ldots + S_{n+m-1}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_{n,m}(x-t) f(t)\, dt; \quad (1)$$

здесь $S_n = S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_n(x-t) f(t)\, dt$ — $n$-я частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$; через $D_{n,m}(x)$ обозначена соответствующая средняя ядер Дирихле $D_n(x)$:

$$D_{n,m}(x) = \frac{1}{m}(D_n + D_{n+1} + \ldots + D_{n+m-1}) = \frac{1}{2m\sin^2\frac{x}{2}} \sin\frac{mx}{2} \sin\frac{2n+m}{2}x. \quad (2)$$

Норму операции $S_{n,m}$ (из $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$) мы будем обозначать через $L_{n,m}$:

$$L_{n,m} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D_{n,m}(x)|\, dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \left|\sin\frac{2n+m}{m} x \sin x\right| \frac{dx}{x^2} \quad (3)$$

(относительно последнего выражения см. [1]). Отметим здесь же, что $L_{n,m} = S_{n,m}(0; \operatorname{sign} D_{n,m}(x))$.

Для случая $m=1$ С. М. Лозинским было доказано [2], что наименьшую норму среди операций $U_{n,1}$ имеет операция $S_{n,1}$, т. е. $n$-я частная сумма ряда Фурье:

$$\|U_{n,1}\| \geqslant \|S_{n,1}\| = L_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D_n(x)|\, dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin(2n+1)x\sin x|}{x^2}\, dx.$$

В общем случае автором данной статьи была получена оценка [3]

$$\|U_{n,m}\| > C \ln\frac{n+m-1}{m}, \quad (4)$$

где константа $C$ (не зависящая от $n$ и $m$) не является, однако, наилучшей. Вопрос о точной оценке (снизу) нормы операции $U_{n,m}$ остается в общем случае, повидимому, еще не решенным.

2. Теорема. *Если $n$ делится на $m$, то среди всех полиномиальных операций $U_{n,m}$ наименьшую норму имеет операция Валле-Пуссена $S_{n,m}$, т. е.*

$$\| U_{n,m} \| \geqslant \| S_{n,m} \| = L_{n,m}. \tag{5}$$

Доказательство мы проведем принадлежащим Г. Фаберу методом «сдвига аргумента». Предварительно построим некоторый элемент $\varphi(x)$ пространства $\widetilde{C}$. (В построении $\varphi(x)$ мы следуем С. М. Лозинскому.)

Рассмотрим функцию $f^*(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{mx}{2}\sin\frac{2n+m}{2}x\right)$, ряд Фурье которой совпадает, очевидно, с рядом Фурье функции $\operatorname{sign} D_{n,m}(x)$. Так как $n = mp$, где $p$ — целое, то (четная) функция $f^*(x)$, имеет период $2\pi/m$.

Следовательно, в ее ряд Фурье будут входить только косинусы углов, кратных $mx$. В частности, в нем будут отсутствовать члены, содержащие $\cos(n+1)x$, $\cos(n+2)x, \ldots, \cos(n+m-1)x$. Этим же свойством будет обладать и средняя Валле-Пуссена порядка $q$ ($q$ — некоторое целое, большее $n+m$), построенная для функции $f^*(x)$.

Положив $\varphi(x) = S_{n,q}(x;\ f^*)$, мы будем, следовательно, иметь:

$$\varphi(x) = S_{n,q}(x;\ f^*) = S_n(x;\ f^*) + \sum_{\nu=n+m}^{q-1} a_\nu \cos\nu x, \tag{6}$$

где $a_\nu$ — некоторые коэффициенты. Написав $\varphi(x)$ в виде (1) и применяя обычным образом неравенство Буняковского, мы найдем, что $\|\varphi(x)\| \leqslant \leqslant \sqrt{1+\frac{2n}{q}}$.

Заменив в (6) аргумент $x$ на $x-\alpha$ ($\alpha$ пока произвольно), получим (обозначив $\varphi(x-\alpha)$ через $\varphi_\alpha(x)$):

$$\varphi_\alpha(x) = S_n(x-\alpha;\ f^*) + \sum_{\nu=n+m}^{q-1} (a_\nu\cos\nu\alpha\cos\nu x + a_\nu\sin\nu\alpha\sin\nu x).$$

Применим к $\varphi_\alpha(x)$ операцию $U_{n,m}$:

$$U_{n,m}(x;\ \varphi_\alpha) = S_n(x-\alpha;\ f^*) + \sum_{\nu=n+m}^{q-1} [a_\nu\cos\nu\alpha\, T_\nu(x) + a_\nu\sin\nu\alpha\, T_\nu^*(x)],$$

где, согласно определению рассматриваемой операции, $T_\nu$ и $T_\nu^*$ — тригонометрические полиномы порядка $\leqslant n+m-1$.

Положив $x = \alpha$, будем иметь:

$$U_{n,m}(\alpha;\ \varphi_\alpha) = S_n(0;\ f^*) + \sigma(\alpha),$$

где $\sigma(\alpha)$ — тригонометрический полином без свободного члена.

При некотором $\alpha = \alpha'$ из промежутка $[0,\ 2\pi]$ этот полином обращается в нуль, и мы получаем: $U_{n,m}(\alpha';\ \varphi_{\alpha'}) = S_n(0;\ f^*)$. Но

$$S_n(0;\ f^*) = S_{n,m}(0;\ f^*) = S_{n,m}(0;\ \operatorname{sign} D_{n,m}) = L_{n,m}.$$

Итак

$$U_{n,m}(\alpha';\ \varphi_{\alpha'}) = L_{n,m},$$

откуда

$$L_{n,m} \leqslant \| U_{n,m} \| \cdot \| \varphi_{\alpha'}(x) \| \quad \text{или} \quad L_{n,m} \leqslant \| U_{n,m} \| \sqrt{1+\frac{2n}{q}}.$$

Устремив теперь число $q$ к $\infty$, получим неравенство (5).

Замечание 1. Из формулы (3) получаем, что при $n = mp$ норма операции $S_{n,m}$ равна обыкновенной константе Лебега со значком $p = \frac{n}{m}$ : $L_{mp,m} = L_p$, так что неравенство (5) можно записать так:

$$\| U_{mp,m} \| \geqslant L_p. \tag{7}$$

Замечание 2. Взяв $m = n$, имеем следующее свойство «основной средней Валле-Пуссена» $S_{n,n}$:

Среди всех линейных операций из $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$, сохраняющих тригонометрические полиномы порядка $n$ и переводящих остальные элементы $\widetilde{C}$ в тригонометрические полиномы порядка $\leqslant 2n-1$, наименьшую норму имеет средняя Валле-Пуссена $S_{n,n} = \frac{1}{n}(S_n + S_{n+1} + \ldots + S_{2n-1})$.

Эта наименьшая норма равна $L_1$ (и, следовательно, не зависит от $n$)

$$\| S_{n,n} \| = L_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{3x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| dx = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \approx 1{,}435.$$

Поступило
27 I 1954

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Б. Стечкин, ДАН, 80, № 4 (1951). [2] С. М. Лозинский, ДАН, 61, № 2 (1948). [3] В. Ф. Николаев, ДАН, 68, № 1 (1949).