Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Е. П. КАЛУГИНА

О КЛАССАХ $H_{\Phi}^{(r_1,\ldots,r_n)}$

(Представлено академиком В. И. Смирновым 1 III 1954)

Настоящая статья посвящена обобщению некоторых результатов С. М. Никольского о классах $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ $(p > 1)$ [1].

Пусть $\Phi(u)$ есть выпуклая строго возрастающая функция, равная нулю при $u = 0$; кроме того, предположим, что Φ^{IV} непрерывна и функция Φ'/Φ'' вогнута. При сделанных предположениях для функции Φ справедливо обобщенное неравенство Минковского, т. е. для любых измеримых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ [2]:

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\Phi}^{*}\left(\frac{f+g}{2}\right) \leqslant {}^1/_2\, \tilde{\mathfrak{M}}_{\Phi}^{*}(f) + {}^1/_2\, \tilde{\mathfrak{M}}_{\Phi}^{*}(g), \tag{1}$$

где

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\Phi}^{*}(\varphi) = \Phi_{-1}\left[\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\Phi\left[|\varphi(x_1,\ldots,x_n)|\right]dx_1\ldots dx_n\right]$$

(Φ_{-1} есть функция, обратная функции Φ).

Неравенство (1) используется существенным образом в доказательствах сформулированных ниже теорем.

Условию (1) удовлетворяют, например, следующие функции:

$$u^p, \quad e^u - u - 1, \quad ue^u, \quad \frac{(u+c)^p}{\ln(u+c)} - \frac{c^p}{\ln c} \quad \text{при} \quad u > 0,$$

где c — положительная постоянная, $p > 1$.

Ограничимся рассмотрением функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, 2π-периодических по каждой из переменных x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, и частных производных, определенных в смысле работы [1].

Определение 1. Введем в рассмотрение следующий функционал:

$$\omega_{x_1,\lambda,\Phi}^{**}(\delta) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \Phi_{-1}\left\{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\Phi\left[\lambda\left|f\left(x_1 - \frac{h}{2}, x_2, \ldots, x_n\right) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + f\left(x_1 + \frac{h}{2}, x_2, \ldots, x_n\right) - 2f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right|\right]dx_1\ldots dx_n\right\},$$

где λ — некоторое положительное число.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит к классу $Lip(\alpha, \Phi, x_1)$ при $0 < \alpha \leqslant 1$, если существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $\delta > 0$ справедливо:

$$\omega_{x_1,\lambda,\Phi}^{**}(\delta) \leqslant M\lambda\delta^{\alpha},$$

где M не зависит ни от λ, ни от δ.

Определение 3. Будем говорить, что измеримая 2π-периодическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит к классу $H_{\Phi x_1}^{(r)}(M)$ $(r > 0)$, если она удовлетворяет следующему условию: представим r в виде $r = \sigma + \alpha$, где σ — целое и $0 < \alpha \leqslant 1$; тогда существует частная производная $\partial^\sigma f / \partial x_1^\sigma$ в указанном выше смысле, для которой при любом постоянном C

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Phi\left[\left| C \frac{\partial^\sigma f}{\partial x_1^\sigma} \right|\right] dx_1 \ldots dx_n < +\infty \tag{2}$$

и которая принадлежит к классу $Lip(\alpha, \Phi, x_1)$.

Определение 4. Будем говорить, что измеримая 2π-периодическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит к классу $H_\Phi^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$ $(r_i > 0)$, если она одновременно принадлежит к классам $H_{\Phi x_1}^{(r_1)}(M_1), \ldots, H_{\Phi x_n}^{(r_n)}(M_n)$.

Если $\Phi(u) = |u|^p$ $(p > 1)$, то класс $H_\Phi^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$ совпадает с классом $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$, рассматриваемым С. М. Никольским (см. [1], § 3).

Введем в рассмотрение следующий функционал для любой функции $f \in L^{*(n)}$ $(L^{*(n)} = L_p^{*(n)}$ при $p = 1)$:

$$A_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}(f)_\Phi = \inf_{T_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}} \sup_{c > 0} \frac{1}{c} \mathfrak{M}_\Phi^* [c \,| f - T_{\gamma_1 \ldots \gamma_n} |],$$

где $\mathfrak{M}_\Phi^*(\varphi) = \Phi_{-1}\left[\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Phi[|\varphi(x_1, \ldots, x_n)|] \, dx_1 \ldots dx_n\right]$

и inf распространяется на все тригонометрические суммы степени $\leqslant \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, соответственно, по $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащая к классу $L^{*(n)}$, принадлежала к классу $H_\Phi^{(r_1, \ldots, r_n)}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство:*

$$A_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}(f)_\Phi < \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\gamma_i^{r_i}}$$

для всех целых $\gamma_i \geqslant 1$ или же для всех γ_i, пробегающих геометрические прогрессии $\gamma_i = a_i^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ с целым положительным знаменателем a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(k_i > 0$ — постоянные).

Теорема 2. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит к классам $L^{*(n)}$ и $H_\Phi^{(r_1, \ldots, r_n)}$ и ρ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие равенству*

$$\sum_1^{i-1} \frac{\rho_k}{r_k} + \frac{\rho_i + \alpha}{r_i} + \sum_{i+1}^n \frac{\rho_k}{r_k} = 1, \tag{3}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, то существует смешанная производная

$$\varphi = \frac{\partial^{\rho_1 + \cdots + \rho_n} f}{\partial x_1^{\rho_1} \ldots \partial x_n^{\rho_n}},$$

для которой справедливо неравенство (2) $(\sigma = \rho_1 + \ldots + \rho_n)$ при любом постоянном C и которая принадлежит к классу $Lip(\alpha, \Phi, x_i)$, где α удовлетворяет условию (3).

Замечание. Теорема 2 установлена С. М. Никольским для случая $\Phi(u) = |u|^p$ $(p \geqslant 1)$ [1,3].

Обозначим

$$F_{\Phi, \Psi, C}^{(m)}(a, s; r_1, \ldots, r_n) = \Psi_{-1}\left[\frac{1}{a^{s\sum\limits_1^m \frac{1}{r_i}}} \Psi\Phi_{-1}\left[a^{s\sum\limits_1^n \frac{1}{r_i}} \Phi\left(\frac{C}{a^s}\right)\right]\right], \tag{4}$$

где Φ, Ψ — выпуклые функции рассматриваемого вида; $1 \leqslant m \leqslant n$; $a > 1$; $r_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; C — любое; $s = 0, 1, 2, \ldots$

Если $\Phi(u) = |u|^p$, $\Psi(u) = |u|^{p'}$, где p, $p' > 1$, то функционал (4) примет вид

$$F_{p, p', C}^{(m)}(a, s; r_1, \ldots, r_n) = \frac{|C|}{a^{s\left[1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)\sum\limits_1^m \frac{1}{r_i} - \frac{1}{p}\sum\limits_{m+1}^n \frac{1}{r_i}\right]}}.$$

Теорема 3. *Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ — выпуклые функции рассматриваемого вида, причем $\Phi(u)/\Psi(u)$ убывает с возрастанием u; $1 \leqslant m \leqslant n$; числа $r_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ таковы, что при $a = l^{r_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, где l — целое число > 1, и при всех $C > 0$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство:*

$$F_{\Phi, \Psi, C}^{(m)}(a, s; r_1, \ldots, r_n) \leqslant M \frac{C}{a^{s\chi_m}},$$

где $\chi_m > 0$, $M \geqslant 1$ — постоянная.

Тогда из того, что $f \in \overset{*(n)}{L} H_{\Phi}^{(r_1, \ldots, r_n)}$, следует: $f \in \overset{*(m)}{L} H_{\Psi}^{(\rho_1^{(m)}, \ldots, \rho_m^{(m)})}$ при любых фиксированных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ где $\rho_k^{(m)} = r_h \chi_m$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$.

Замечание. Теорема 3 установлена С. М. Никольским для того случая, когда $\Phi(u) = |u|^p$, $\Psi(u) = |u|^{p'}$ $(p' \geqslant p \geqslant 1)$.

Теоремы 2 и 3 доказываются при помощи теоремы 1.

Поступило
26 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 38 (1951). [2] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, 1948. [3] С. М. Никольский, ДАН, 59, 1533 (1948).