Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 1

МАТЕМАТИКА

А. С. ЕСЕНИН-ВОЛЬПИН

НЕДОКАЗУЕМОСТЬ ГИПОТЕЗЫ СУСЛИНА БЕЗ ПОМОЩИ АКСИОМЫ ВЫБОРА В СИСТЕМЕ АКСИОМ БЕРНАЙСА — МОСТОВСКОГО

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 III 1954)

1. Пусть C — непрерывно упорядоченное множество, не имеющее первого и последнего элементов; D_C — утверждение, что существует счетное плотное подмножество C; S_C — утверждение, что всякое множество попарно непересекающихся интервалов C не более чем счетно. Известно, что для любого C, удовлетворяющего высказанному условию, S_C следует из D_C, причем доказательство может быть проведено без помощи аксиомы выбора (1). Утверждение, что и обратно — для всякого такого C D_C следует из S_C — называется гипотезой Суслина. Ввиду безуспешности многих попыток доказать или опровергнуть эту гипотезу, некоторый интерес может представлять настоящая работа, в которой доказывается, что:

Если теория множеств непротиворечива, то гипотеза Суслина не может быть доказана в ней без помощи аксиомы выбора.

При этом в основу теории множеств кладется система аксиом, в которой допускается, что элементами классов могут быть не только классы — например, система $\mathfrak{S}$ Бернайса — Мостовского (2), причем аксиома выбора не входит в эту систему, которая в остальном достаточна для проведения всех классических рассуждений *. Первоначальные понятия мы будем именовать: предмет и класс, причем предметы, являющиеся классами, мы будем называть множествами, а остальные предметы — индивидуумами. Класс всех индивидуумов обозначим Ind. Переменные предметы мы будем обозначать малыми русскими буквами, не похожими на латинские или греческие, переменные классы — большими латинскими, переменные множества — малыми латинскими. Мы будем, если не оговорено противное, придерживаться обозначений (3); для удобства дальнейшего изложения мы заменим в системе $\mathfrak{S}$ аксиомы 12 и 17 на аксиомы, получающиеся из B7 — B8 системы Σ (3) заменой малых латинских букв на малые русские **. Мы будем считать, что полученная таким образом система, которую попрежнему будем обозначать $\mathfrak{S}$ (она равносильна системе Бернайса — Мостовского), непроти-

* Результаты этой работы сохраняют силу и для системы 'A, B, C' (5). Однако перенесение их на систему Σ потребовало бы построения нестандартной модели для Σ в смысле (6) или же опровержения гипотезы Суслина для системы, фигурирующей в 4.66 (6). Вовлечение аксиомы выбора в наш результат повлекло бы его распространение на систему Σ с аксиомой выбора.

** Аксиома 16, соответствующая аксиоме B6 из Σ, становится при этом доказуемой (ср. (4)); то же можно сказать и об аксиоме 3.

воречива; тогда легко показать, что непротиворечива и система $\mathfrak{S}_C$, получающаяся присоединением к $\mathfrak{S}$ аксиомы о том, что класс индивидуумов имеет мощность континуума. Заметим для этой цели, что модель Δ Гёделя [3], в которой имеют место аксиома выбора и $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ при любом α, может быть также хорошо построена средствами $\mathfrak{S}$, как и средствами системы Σ из [3]; рассмотрим далее модель H, определенную следующим образом: пусть Π — функция модели Δ, 1 : 1-отображающая класс P (On) этой модели на $On - \aleph_1$, причем для любых x и y из области определения Π $x \varepsilon y$ влечет $\Pi‘x \varepsilon \Pi‘y$ (функция Π легко строится при помощи функции Od модели Δ и теоремы [3] 9.52); будем называть «предметами» модели H порядковые числа модели Δ, «классами» — элементы $On - \aleph_1$ и собственные классы, содержащиеся в On, и будем считать, что «предмет» $ц$ «принадлежит» «классу» A, если $A \varepsilon On - \aleph_1$ и $\Pi‘ц \varepsilon A$ или если $Pr(A)$ и $ц \varepsilon A$. Можно доказать, что модель H удовлетворяет всем аксиомам системы $\mathfrak{S}$ (пустым множеством является $\Pi‘O$), а также аксиоме выбора в форме E [3], причем вместо y следует в ней писать $ц$, а также обобщенной континуум-гипотезе. Мы докажем:

Средствами модели H может быть построена модель Z, удовлетворяющая всем аксиомам $\mathfrak{S}$, в которой гипотеза Суслина не имеет места.

Отсюда следует, что если система $\mathfrak{S}$ непротиворечива, то гипотеза Суслина не может быть доказана ее средствами.

2. В доказательстве последнего утверждения играет роль

Теорема. *Пусть класс P удовлетворяет следующим пяти условиям:* 1) *P полон, т. е.* $(x)[x \varepsilon P \supset x \subseteq P]$; 2) *$P$ фундаментально-замкнут, т. е. из $ф, ц \varepsilon P$ следует $F_i(ф, ц) \varepsilon P$, где $F_i(ф, ц)$ определяются как в* [3] 9.1, *а если при $i > 1$ один из $ф, ц$ есть индивидуум, то $F_i(ф, ц) = 0$;* 3) *P E-замкнут, т. е.* $(u)[u \subseteq P \supset (\exists v)[u \subseteq v \cdot v \varepsilon P]]$; 4) $\omega \varepsilon P$; 5) *P вполне упорядочен посредством некоторого отношения.*

Пусть Z — модель, определенная следующим образом: «предмет» есть элемент P; «класс» есть подкласс P, дающий элемент P в пересечении с любым элементом P (считая, что пересечение индивидуума с предметом или классом есть 0); «отношение принадлежности» между «предметами» и «классами» есть отношение принадлежности исходной системы, ограниченное «предметами» и «классами».

Тогда модель Z удовлетворяет всем аксиомам системы $\mathfrak{S}$.

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично тем рассуждениям, которыми в [3] доказывается выполнение всех аксиом Σ в модели Δ. Абсолютность (в смысле [3] или [5]) рассмотренных в главе VII [3] понятий и операций доказывается так же, как в [3], причем абсолютными оказываются также ω и понятие взаимной однозначности: $Un_2(X) . \equiv : Un(X) . Un(X^{-1})$; класс индивидуумов модели Z состоит из индивидуумов, принадлежащих P.

Все дальнейшие рассуждения будут проводиться в модели H; из аксиомы E (и аксиомы фундирования *) следует соблюдение условия 5) для любого класса.

3. Так как класс Ind модели H имеет мощность континуума, то он может быть упорядочен в H по типу числовой прямой посредством некоторого упорядочивающего отношения R.

Назовем наследством любого предмета $ц$ класс, состоящий из $ц$ и всех предметов $ю$, для которых существует конечная последовательность $ц_0 = ц, ц_1, \ldots, ц_r = ю$, где $ц_i \varepsilon ц_{i-1}$ при $i = 1, \ldots, r$. Можно

* Т. е. аксиоме D из [3]; замечу, что в этой аксиоме можно, не ослабляя системы Σ или $\mathfrak{S}$, заменить A на a.

доказать, что наследство любого предмета *ц* есть множество, которое обозначим через S_ω‘*ц*.

Назовем перестановкой всякое 1 : 1-отображение *Ind* на себя, а всякое 1 : 1-отображение универсального класса V на себя, сохраняющее ε-отношение и совпадающее на *Ind* с некоторой перестановкой, назовем E-изоморфизмом.

Справедливы следующие утверждения:

a) всякая перестановка может быть продолжена до однозначно определенного E-изоморфизма (последний определяется индукцией от всех элементов множества к самому множеству, возможность такой индукции равносильна аксиоме фундирования). Я буду говорить, что этот E-изоморфизм порождается данной перестановкой;

b) E-изоморфизм, порожденный результатом последовательного применения двух перестановок, совпадает с результатом последовательного применения двух E-изоморфизмов, порожденных этими перестановками;

c) E-изоморфизмы сохраняют отношения *э* $= F_i$ (*юя*);

d) если Q — E-изоморфизм, то (*ю*) [Q‘‘S_ω‘*ю* $= S_\omega$‘Q‘*ю*];

e) всякое порядковое число переходит в себя при любом E-изоморфизме (так как в его наследство индивидуумы не входят).

Назовем Г-границей всякое множество индивидуумов γ, являющееся границей некоторого открытого подмножества *Ind*, рассматриваемого как топологическое пространство, окрестностная база которого есть семейство интервалов *Ind* в упорядочении R. Легко видеть, что:

f) если γ_1 и γ_2 суть границы открытых множеств G_1 и G_2 пространства *Ind*, то $\gamma_1 + \gamma_2$ есть граница открытого множества $G_1 + G_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)$;

g) если γ — Г-граница и E-изоморфизм Q сохраняет на *Ind* отношение R, то Q‘γ есть Г-граница.

Если γ — Г-граница, я буду называть γ-консервативным всякий E-изоморфизм, переводящий каждый элемент γ в себя и сохраняющий на *Ind* отношение R. Я буду называть предмет *ш* симметричным относительно Г-границы γ, если всякий γ-консервативный E-изоморфизм переводит *ш* в себя; я буду называть *ш* симметричным, если *ш* симметричен относительно некоторой Г-границы. Наконец, я буду называть *ш* наследственно-симметричным, если S_ω‘*ш* состоит только из симметричных предметов. Нормальность введенных понятий устанавливается при помощи того, что можно в их определениях вместо E-изоморфизмов говорить об E-изоморфизмах, ограниченных наследством рассматриваемого предмета (это доказывается при помощи a), а последние суть множества. Класс всех наследственно-симметричных предметов обозначим P.

Класс P удовлетворяет условиям 1)—4) п. 2. Действительно, 1) следует из определения наследства; если *ю* симметричен относительно γ_1, а *я* — относительно γ_2, то, в силу c) и f), F_i (*юя*) симметричен относительно $\gamma_1 + \gamma_2$, и так как наследственная симметричность F_i (*юя*) при *ю*, *я* εP вытекает далее из определения фундаментальных операций, то P удовлетворяет 2). При помощи b), того, что сохраняющие R перестановки образуют группу, и g) доказывается, что если *ш* симметричен относительно γ, а Q — E-изоморфизм, сохраняющий на *Ind* отношение R, то Q‘*ш* симметричен относительно Q‘γ и далее, при помощи d), — что Q‘‘$P = P$; теперь легко видеть, что если $u \subseteq P$, то сумма множества (в силу того, что *Ind* — множество) всех образов u посредством всех сохраняющих R E-изоморфизмов входит в P и содержит u, иными словами, P удовлетворяет условию 3). 4) для P следует из e).

Поэтому на основании теоремы из п. 2 класс P определяет некоторую модель Z, удовлетворяющую всем аксиомам $\mathfrak{S}$.

4. Легко видеть, что каждый индивидуум входит в P, а потому

класс индивидуумов модели Z совпадает с классом индивидуумов модели H. Далее из абсолютности операции $\langle юя \rangle$ следует, что $R \varepsilon P$, и поэтому класс индивидуумов модели Z также является упорядоченным посредством R (это упорядочение абсолютно). Каждое сечение Ind в модели Z является поэтому сечением Ind в модели H, а потому обладает пограничным элементом в H; будучи индивидуумом, этот элемент принадлежит P и в силу абсолютности упорядочения R является и в Z пограничным. Поэтому Ind упорядочен посредством R непрерывно и в смысле модели Z.

Пусть G — множество попарно непересекающихся интервалов Ind в модели Z; в силу абсолютности упорядочения R оно будет таковым же и для модели H, следовательно, $S(G)$ открыто в Ind, пусть γ — граница $S(G)$ (в смысле H). Так как G счетно в смысле H, то существует в модели H функция f, осуществляющая $1:1$-отображение G на ω. Легко видеть, что f симметрично относительно γ и, далее, что $f \varepsilon P$; в силу абсолютности ω и понятия взаимной однозначности отсюда следует, что G счетно и в смысле модели Z.

Пусть x — подмножество Ind, принадлежащее модели Z; тогда x симметрично относительно некоторой Г-границы γ. Пусть $G = Ind - \gamma$; g — любой из интервалов, на которые распадается G (в модели H),— пусть $g = (g_1, g_2)$; тогда $g_1, g_2 \varepsilon \gamma$. Любая точка g может быть переведена в любую другую точку g посредством некоторого $1:1$-отображения Ind на себя, тождественного вне g (следовательно, на γ) и монотонного на g; согласно а), это отображение может быть продолжено до γ-консервативного E-изоморфизма. Поэтому, если $g \cdot x \neq 0$, то $g \subseteq x$.

Поэтому плотное $x \subseteq Ind$ должно содержать целый интервал Ind и не может быть счетным в модели H; а так как, в силу абсолютности ω и Un_2, каждое множество, счетное в смысле модели Z, счетно и в модели H, то никакое плотное подмножество Ind не может быть счетным — в смысле Z. Это означает, что в модели Z гипотеза Суслина не имеет места.

Также просто доказывается, что если $x \subseteq Ind$ плотно, то $Ind - x$ не может быть плотным (в модели Z), откуда следует, что аксиома выбора нарушается в модели Z.

Поступило
19 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Sierpiński, Leçons sur les nombres transfinis, 1928. [2] A. Mostowski, Fundamenta Mathematicae, 32, 201 (1939). [3] К. Гёдель, Усп. матем. наук, 3, в. 1 (23), 96 (1948). [4] А. А. Марков, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, 569 (1948). [5] J. C. Shepherdson, J. Symbolic Logic, 16, 3, 161 (1951). [6] J. C. Shepherdson, ibid., 18, 2, 145 (1953).