Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Г. И. БИРЮК

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 3 III 1954)

Рассмотрим систему нелинейных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon F(t, x), \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор; A — постоянная n-мерная матрица, характеристическое уравнение которой

$$\operatorname{Det} \| \lambda E - A \| = 0 \tag{2}$$

не имеет чисто мнимых корней; ε — малый параметр; функция $F(t, x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) Для некоторой окрестности D точки $x = 0$ можно указать такую положительную постоянную L, что для любых точек x', $x'' \in D$ и для всех вещественных значений $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$| F(t, x') - F(t, x'') | \leqslant L \, | x' - x'' |; \tag{3}$$

2) $F(t, x)$ — почти периодическая функция переменной t равномерно по отношению к $x \in D$, так что для любого $\varepsilon_1 > 0$ можно найти такие функции $F_\nu(x)$ и вещественные постоянные ν, что

$$\Big| F(t, x) - \sum_\nu e^{i\nu t} F_\nu(x) \Big| \leqslant \varepsilon_1$$

везде в области $-\infty < t < \infty$, $x \in D$.

Пусть D_σ обозначает область точек $x \in D$, для которых $|x| \leqslant \sigma$, $\sigma = \inf \rho(0, \bar{x})$, где $\bar{x}$ — точка на границе D.

Теорема. *Если корни λ уравнения* (2) *удовлетворяют условию*

$$|\operatorname{Re} \lambda| > 0, \tag{4}$$

то можно указать такое $\varepsilon^*(\sigma) > 0$, что для любого $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ система (1) *при выполнении условий* 1), 2) *имеет единственное почти периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, лежащее в области D_σ.*

При доказательстве теоремы используется следующая лемма:

Лемма. *Для системы*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \tag{5}$$

в которой $f(t)$ — почти периодическая функция, $|f(t)| \leqslant M$, и корни λ соответствующего характеристического уравнения удовлетворяют условию (4), *можно указать единственное частное почти периоди-*

ческое решение $x(t)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$|x(t)| \leqslant \frac{4Mk}{\gamma^{n+1}}, \tag{6}$$

где k — *некоторая постоянная, зависящая только от матрицы* A; γ — *положительная постоянная, удовлетворяющая условию* $|\operatorname{Re}\lambda| > \gamma$, *которое следует из* (4).

Доказательство леммы осуществляется немедленно, если представить решение однородного матричного уравнения $\frac{du}{dt} = Au$, удовлетворяющее условию $u(0) = E$, в виде $u(t) = u_-(t) + u_+(t)$, где $u_-(t)$, $u_+(t)$ — частные решения этого уравнения, отвечающие корням характеристического уравнения, соответственно, с $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Действительно, частное решение системы (5) можно взять в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} u_-(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \int_{\infty}^{t} u_+(t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Тогда из ограниченности $f(t)$ и оценок для $u_-(t)$, $u_+(t)$, приведенных в [1], вытекает неравенство (6).

Почти периодичность решения (7) и его единственность очевидны.

Основная теорема доказывается методом последовательных приближений. При этом m-е приближение определяется как почти периодическое решение вида (7) системы

$$\frac{dx_m}{dt} = Ax_m + \varepsilon F(t, x_{m-1}), \tag{8}$$

причем за нулевое приближение принимается $x_0 = 0 \in D_\sigma$.

На основании леммы и неравенства (3) m-е приближение удовлетворяет неравенству

$$|x_m(t, \varepsilon)| \leqslant \frac{4|\varepsilon| P_{m-1} k}{\gamma^{n+1}},$$

где P_{m-1} — постоянная, ограничивающая сверху почти периодическую функцию $F(t, x_{m-1})$.

Полагая

$$\varepsilon^* = \frac{\gamma^{n+1}}{4k} \min\left\{\frac{\sigma}{P^*}, \frac{1}{L}\right\},$$

где $P^* = \sup_m \{P_m\}$, легко видеть, что при $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ все последовательные приближения не выходят из области D_σ.

Доказательство сходимости последовательности $\{x_m(t, \varepsilon)\}$ сводится к рассмотрению ряда

$$x_0 + (x_1 - x_0) + \cdots + (x_m - x_{m-1}) + \cdots, \tag{9}$$

m-й член которого, в силу леммы и неравенства (3), удовлетворяет для любого целого m неравенству

$$|x_m - x_{m-1}| \leqslant \frac{4|\varepsilon| P_0 k}{\gamma^{n+1}} \left(\frac{4|\varepsilon| Lk}{\gamma^{n+1}}\right)^{m-1}.$$

Для любого $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ ряд (9) и, следовательно, последовательность $\{x_m(t, \varepsilon)\}$, равномерно сходится к предельной функции $x(t, \varepsilon) \in D_\sigma$, которая является почти периодической как предел равномерно сходящейся последовательности почти периодических функций.

Переходом к пределу при $m \to \infty$ в интегральном уравнении, равносильном (8), нетрудно убедиться, что предельная функция удовлетворяет исходной системе (1).

Предположение о существовании, кроме $x(t, \varepsilon)$, еще одного почти периодического решения $y(t, \varepsilon)$, приводит, на основании леммы и условия (3), к неравенству

$$|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| \leqslant \frac{4|\varepsilon| Lk}{\gamma^{n+1}} |x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)|,$$

возможному, в силу выбора $|\varepsilon| < \varepsilon^*$, лишь когда $x(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon)$, что доказывает единственность почти периодического решения.

Следует заметить, что полученное почти периодическое решение системы (1) асимптотически устойчиво или неустойчиво в зависимости от знаков вещественных частей корней уравнения (2).

Справедливо утверждение:

Если все определители Гурвица, относящиеся к характеристическому уравнению (2), *положительны, то любое другое решение* $x^*(t, \varepsilon)$ *системы* (1) *экспоненциально стремится при* $t \to \infty$ *к почти периодическому.*

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за ряд ценных советов.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
27 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. З. Штокало, Матем. сборн., **19**, в. 2, 280 (1946).