

Академик Л. Д. ЛАНДАУ, А. А. АБРИКОСОВ и И. М. ХАЛАТНИКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ГРИНОВСКОЙ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В предыдущей работе (1) нами были получены уравнения для основных функций квантовой электродинамики. Поскольку мы поставили своей задачей точное решение этих уравнений, мы не можем пользоваться для величин G , $D_{\mu\nu}$ и Γ_μ их обычными выражениями даже с перенормированными коэффициентами.

Ввиду аналитичности функций G и $D_{\mu\nu}$ нам достаточно определить их при отрицательных значениях p^2 и k^2 (пространственные векторы), после чего они могут быть аналитически продолжены через верхнюю полуплоскость на положительные (временные) значения. Пользуясь преобразованием, указанным в работе (1), мы можем перевести интегрирование в уравнениях для G и $D_{\mu\nu}$ в евклидовское 4-мерное пространство. Поэтому для определения G и $D_{\mu\nu}$ существенную роль играют Γ_μ от чисто пространственных векторов. Проводя то же преобразование в уравнении для Γ_μ , мы видим, что такие «пространственные» G , $D_{\mu\nu}$ и Γ_μ составляют замкнутую систему величин, не требующих для своего определения рассмотрения Γ_μ в других областях значений импульсов. В этой работе мы ограничимся получением, кроме G и $D_{\mu\nu}$, только «пространственных» Γ_μ и тех, которые могут быть получены из них аналитическим продолжением.

При решении уравнений основное значение имеет поведение всех функций при больших значениях импульсов $p \gg m$ и $k \gg m$. Будем искать функции G и $D_{\mu\nu}$ в виде:

$$G(p) = \frac{\beta(p^2)}{\hat{p}}; \quad (1)$$

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left[d_t(k^2) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + d_l(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right], \quad (2)$$

где функции $\beta(p^2)$, $d_t(k^2)$, $d_l(k^2)$ — медленно меняющиеся функции от p^2 и k^2 . Что касается Γ_μ , то покажем, что уравнению для Γ_μ удовлетворяет выражение вида

$$\Gamma_\mu(p, q; l) = \gamma_{\mu\alpha}(f^2), \quad (3)$$

где $\alpha(f^2)$ — медленно меняющаяся функция аргумента; f^2 — любая из величин p^2 , q^2 и l^2 , когда они одного порядка. В случае, когда одна из этих величин мала по сравнению с двумя другими, в качестве f^2 надо брать наибольшую. Поскольку мы вычисляем «пространственные» Γ_μ , для которых $\sqrt{-p^2}$, $\sqrt{-q^2}$, $\sqrt{-l^2}$ представляют стороны обычного треугольника (т. е. удовлетворяют неравенствам $\sqrt{-q^2} + \sqrt{-l^2} > \sqrt{-p^2}$ и т. д.), мы сможем аналитически продолжить по-

лучаемые решения только на такие не чисто пространственные Γ_μ , для которых либо p^2 , q^2 и l^2 одного порядка величины, либо при малости одного из них два других достаточно близки друг к другу.

Подставим выражения (1), (2), (3) в уравнение (1) работы (1). Легко видеть, что стоящий в правой части интеграл за исключением слабо меняющихся функций логарифмически расходится при $|k^2| \gg |p^2|$ и $|k^2| \gg |q^2|$. Соответственно, эта область интегрирования играет в интеграле основную роль. В этой области можно пренебречь p , q и l по сравнению с k , и все стоящие под интегралом выражения становятся функциями только от k . После усреднения по направлениям вектора k γ_μ выходит за знак интеграла, подтверждая этим формулу (3), а под интегралом остается скалярное выражение. Для того чтобы перевести интегрирование по d^4k в простое интегрирование по dk^2 , воспользуемся преобразованием $k_0 \rightarrow ik_0$, указанным в работе (1). Тогда d^4k перейдет в $i(2\pi)^{-2} d\Omega$. $d\Omega$ есть элемент объема в 4-мерном евклидовом пространстве и может быть записан в виде $2\pi^2 R^3 dR$, где R — радиус, в данном случае равный $\sqrt{-k^2}$. Таким образом, имеем:

$$d^4k \rightarrow \frac{i}{4} (-k^2) d(-k^2). \quad (4)$$

Вводя новую переменную $\xi = \ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right)$, получаем окончательно:

$$\alpha(\xi) = 1 + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} \alpha^3(z) \beta^2(z) d_l(z) dz. \quad (5)$$

Отметим, что в это уравнение не входит величина d_l .

Перейдем теперь к уравнению для G (4) (1). Легко видеть, что стоящий здесь интеграл при больших $k \gg p$ расходится. Хотя эта расходимость на первый взгляд первого порядка по k , усреднение по направлениям приводит, как известно, ввиду векторного характера величины k , снова к логарифмической расходимости. Это значит, что при разложении подинтегрального выражения по обратным степеням k мы должны всюду учитывать члены следующего порядка малости. Соответствующие члены в G находятся непосредственно из формулы (1), где мы, разумеется, можем, ввиду слабой зависимости β от p^2 , ограничиться разложением в ряд знаменателя, т. е. написать

$$G(p-k) \approx -\frac{\beta(k^2)}{\hat{k}} - \beta(k^2) \frac{1}{\hat{k}} \hat{p} \frac{1}{\hat{k}}. \quad (6)$$

Необходимо, однако, также учесть поправки порядка p/k и в $\Gamma_\mu(p, p-k; k)$. Для определения этих поправок мы должны обратиться снова к уравнению для Γ_μ . Поскольку дело идет о малых добавках, возникающих при переходе от $p=0$ к конечному p , мы можем рассматривать изменение интеграла в правой части как сумму изменений, происходящих от каждого члена под интегралом. Оценка получающегося при этом выражения показывает, что при $k \gg l$ подинтегральная функция обратно пропорциональна k^5 , т. е. интеграл при больших k сходится. Однако интеграл приобретает логарифмический вид в области значений k $l \gg k \gg p$, которая, таким образом, и должна явиться главной областью интегрирования. При больших и меньших значениях k интеграл дает относительно малые поправки, которыми можно пренебречь с рассматриваемой точностью.

В указанной области интегрирования достаточно, очевидно, учитывать только добавки p/k , так как они гораздо больше чем p/l .

Можно показать, что достаточно ограничиться в выражении для $\Gamma_\sigma(p, p-l; l)$ добавками вида

$$i[\Delta_1(p^2, l^2)\hat{l}\gamma_\sigma + \Delta_2(p^2, l^2)\gamma_\sigma\hat{l}]\frac{\hat{p}}{l^2}; \quad (7)$$

нетрудно проверить, что добавки другого вида не возникают от G в форме (6), сами при подстановке в интеграл дают опять выражения типа (7), а поэтому при сравнении левой и правой частей уравнения оказываются равными нулю.

Подставляя (6) и (7) в уравнение для Γ_σ (1) (1) и используя преобразование (4), получаем для Δ_1 и Δ_2 уравнения:

$$\Delta_1(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{8\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) \{ \Delta_1(\xi, z) [d_l(z) - d_t(z)] + \\ + [\Delta_2(\xi, z) + \alpha(z)] [d_l(z) + d_t(z)] \}; \quad (8)$$

$$\Delta_2(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{8\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) \{ \Delta_1(\xi, z) [d_l(z) + d_t(z)] + \\ + [\Delta_2(\xi, z) + \alpha(z)] [d_l(z) - d_t(z)] \}.$$

Здесь $\xi = \ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right)$ и $\eta = \ln\left(-\frac{l^2}{m^2}\right)$.

Подставляя выражения (6) и (7) в интеграл в уравнении для G , в котором основная область интегрирования $p \ll k < \infty$, получаем после аналогичных преобразований:

$$\frac{1}{\beta(\xi)} = 1 + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} [\alpha(z) + \Delta_1(\xi, z) + \Delta_2(\xi, z)] \beta(z) d_l(z) dz. \quad (9)$$

Складывая оба уравнения (8), получаем для суммы $\Delta_1 + \Delta_2$:

$$\Delta_1(\xi, \eta) + \Delta_2(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \beta(z) d_l(z) [\Delta_1(\xi, z) + \Delta_2(\xi, z) + \alpha(z)] dz. \quad (10)$$

Отметим, что в этом уравнении и в уравнении (9) снова выпала величина d_t . Таким образом, уравнения для определения Γ_μ и G могут решаться независимо от вычисления фотонной функции $D_{\mu\nu}$. Продольная часть d_l является, как уже указывалось, произвольной величиной, которую мы сохраняем в уравнениях для доказательства их градиентной инвариантности. Само собой разумеется, что зависимость G и Γ_μ от d_l ни в какой мере не противоречит градиентной инвариантности уравнений, поскольку эти величины при градиентном преобразовании не остаются неизменными.

Введем обозначение

$$\frac{\Delta_1(\xi, \eta) + \Delta_2(\xi, \eta)}{\alpha^2(\eta) \beta(\eta)} = q(\xi, \eta); \quad (11)$$

тогда $q(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$q(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) q(\xi, z) + \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha(z) \beta(z) d_l(z) dz. \quad (12)$$

Уравнение (9) может быть теперь записано в виде:

$$\frac{1}{\beta(\xi)} = 1 + q(\xi, \infty). \quad (13)$$

Уравнения (5), (12) и (13) дают возможность однозначно определить α и β . После дифференцирования уравнений (5) и (12) (последнего по η) получаем:

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = -\frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^3(\xi) \beta^2(\xi) d_l(\xi); \quad (14)$$

$$\frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta^2(\eta) d_l(\eta) q(\xi, \eta) + \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha(\eta) \beta(\eta) d_l(\eta). \quad (15)$$

К этому надо добавить граничные условия из интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty; \\ q &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = \eta. \end{aligned}$$

Вводя новую функцию $r(\xi, \eta) = \alpha(\eta) q(\xi, \eta)$, имеем:

$$\frac{\partial r(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\eta) \beta(\eta) d_l(\eta).$$

Отсюда

$$r(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\eta} \alpha^2(z) \beta(z) d_l(z) dz, \quad \frac{\partial r(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta(\xi) d_l(\xi).$$

При $\eta \rightarrow \infty$ имеем из (13) $r(\xi, \infty) = \frac{1}{\beta(\xi)} - 1$, откуда

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} \alpha^2(\xi) \beta^3(\xi) d_l(\xi).$$

Из этого уравнения и (14) следует $\alpha\beta = \text{const}$ или, учитывая граничные условия,

$$\alpha(\xi) \beta(\xi) = 1. \quad (16)$$

Легко видеть, что это условие непосредственно следует из теоремы Уорда⁽²⁾

$$\Gamma_{\mu}(p, p; 0) = \frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_{\mu}},$$

если учесть, что медленно меняющаяся функция β дает при дифференцировании член более высокого порядка.

После подстановки (16) в уравнение (14) получаем окончательно, с учетом граничного условия,

$$\alpha(\xi) = \exp\left[\frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} d_l(z) dz\right], \quad \beta(\xi) = \exp\left[-\frac{e_1^2}{4\pi} \int_{\xi}^{\infty} d_l(z) dz\right]. \quad (17)$$

Формулы (17) изображают по существу градиентное преобразование величин G и Γ_{μ} (для медленно меняющихся величин d_l). Наиболее удобным выбором является, очевидно, выбор $d_l = 0$ (в противоположность обычно полагаемому $d_l = 1$). При этом никаких расходимостей у Γ_{μ} и G не возникает вообще, и эти величины (Γ_{μ} с указанными выше ограничениями) просто равны своим нулевым значениям. Отметим, что такая нормировка по существу соответствует условию Лоренца $\partial A_i / \partial x_i = 0$.

Поступило
19 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Д. Ландау, ² А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, № 3 (1954). ² I. C. Ward, Phys. Rev., 78, 182 (1950).