Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 4

ФИЗИКА

С. А. КАПЛАН и К. П. СТАНЮКОВИЧ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОГАЗОДИНАМИКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 26 I 1954)

Магнитогазодинамика в последнее время часто применяется при исследовании многих проблем геофизики и астрофизики. Однако до сих пор решения уравнений магнитогазодинамики были получены только для случая малых колебаний.

В настоящей заметке мы покажем, что задачи о произвольном одномерном нестационарном течении газа, обладающего бесконечно большой проводимостью, в магнитном поле можно свести к обычным одномерным задачам газодинамики и тем самым получить достаточно общие решения.

Как известно, уравнения магнитогазодинамики при бесконечно большой проводимости и пренебрежимо малой вязкости газа имеют вид [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}+\frac{\mu}{4\pi\rho}[\mathbf{H},\operatorname{rot}\mathbf{H}]=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{vH}]; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}); \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0, \qquad (4)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, ρ — плотность, p — давление, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, μ — магнитная проницаемость, которая в дальнейшем будет считаться постоянной. К уравнениям (1) — (4) следует также добавить условие адиабатичности или уравнение, определяющее изменение энтропии. В этой работе мы ограничимся рассмотрением адиабатических (изэнтропических) движений.

Из (1) сразу следует, что движение может быть одномерным только при условии $\mathbf{v}\parallel[\mathbf{H},\operatorname{rot}\mathbf{H}]$, т. е. при $\mathbf{v}\perp\mathbf{H}$ (отвлекаясь от тривиального случая $\mathbf{v}\parallel\mathbf{H}$). Из (2) тогда вытекает, что вектор $\mathbf{H}$ должен сохранять свое направление в пространстве, меняясь только по абсолютной величине. Поэтому, выбирая ось x по направлению движения, а ось y по направлению $\mathbf{H}$, мы можем уравнения магнитогазодинамики для одномерного движения записать в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{8\pi\rho}\frac{\partial H^2}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial(vH)}{\partial x}=0; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(v\rho)}{\partial x}=0. \qquad (7)$$

Уравнение (4) выполняется в этом случае тождественно.

Из (6) и (7) сразу получаем первый интеграл системы уравнений

$$\frac{H}{\rho}=b(S), \tag{8}$$

где S — энтропия.

Этот интеграл описывает так называемую «приклеенность» или «вмороженность» в вещество магнитных силовых линий. В частном случае величина b может быть постоянной, которая определяется, очевидно, начальными условиями. Подставляя (8) в (5), получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{\mu b^2}{8\pi}\rho^2\right). \tag{9}$$

Уравнения (7) и (9) совместно с условием адиабатичности и определяют движение газа в рассматриваемой задаче.

Таким образом, произвольную задачу об одномерном нестационарном течении газа в магнитогазодинамике можно, действительно, свести к аналогичной задаче газодинамики, в которой следует только обычное выражение уравнения состояния $p(\rho)$ заменить на выражение:

$$p_m(\rho)=p(\rho)+\frac{\mu b^2}{8\pi}\rho^2. \tag{10}$$

В частности, для скорости распространения возмущений

$$c_m^2=\left(\frac{\partial p_m}{\partial\rho}\right)_s=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s+\frac{\mu b^2}{4\pi}\rho=c^2+\frac{\mu H^2}{4\pi\rho}, \tag{11}$$

где $c=\sqrt{\gamma p/\rho}$ — обычная скорость звука, а $\sqrt{\mu H^2/4\pi\rho}$ — магнитогазодинамическая скорость, γ — отношение теплоемкостей.

Уравнения характеристики имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt}=v\pm c_m=v\pm\sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}+\frac{\mu b^2}{4\pi}\rho}\ ;\\ v\pm\int\frac{c_m d\rho}{\rho}=v\pm\int\frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}+\frac{\mu b^2}{4\pi}\rho}=\mathrm{const}.\end{gathered} \tag{12}$$

Скорость истекания газа в вакуум (в котором нет также и магнитного поля)

$$v_{\max}=\int\limits_0^{\rho_0}\frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}+\frac{\mu b^2}{4\pi}\rho}. \tag{13}$$

Очевидно, что выражения (12) и (13) могут быть легко подсчитаны для любого заданного уравнения адиабаты.

Для стационарного течения $(\partial v/\partial t=0)$ из (9) находим аналог уравнения Бернулли:

$$\frac{1}{2}v^2+w+\frac{\mu b^2}{4\pi}\rho=\frac{1}{2}v^2+\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{\mu H^2}{4\pi\rho}=\mathrm{const}, \tag{14}$$

где w — тепловая функция.

Известно, далее, что можно получить общее решение газодинамической задачи об одномерном движении в случае, если уравнение состояния имеет вид ([2])

$$p=A\rho^{\frac{2n+3}{2n+1}}+B,$$

где A и B — произвольные постоянные, а n — целое положительное число или нуль. Очевидно, что подобным же образом можно получить общее решение магнитогазодинамической задачи об одномерном движении газа в случае, если уравнение состояния имеет вид:

$$p(\rho) = A\rho^{\frac{2n+3}{2n+1}} + B - \frac{\mu b^2}{8\pi}\rho^2. \tag{15}$$

Подбирая три произвольных параметра: A, B и n в (15), мы можем с достаточной точностью аппроксимировать любое действительное уравнение состояния. В частности, особенно простым является случай $n=0$, так как тогда можно произвольное движение разложить на две невзаимодействующие волны, распространяющиеся в разные стороны. Таким образом, если действительное уравнение состояния аппроксимировать в виде

$$p(\rho) = A\rho^3 + B - \frac{\mu b^2}{8\pi}\rho^2, \tag{16}$$

то общее решение соответствующих уравнений магнитогазодинамики имеет вид

$$x = (v \pm c_m)t + F_{1,2}(v \pm c_m),$$
$$c_m = 3A\rho^2 - \frac{\mu b^2}{4\pi}\rho = 3A\rho^2 - \frac{\mu H^2}{4\pi\rho}, \tag{17}$$

где F_1 и F_2 — две произвольные функции. Нетрудно убедиться, что аппроксимация (16) дает достаточно хорошее приближение для уравнений состояний вида $p = \text{const}(\rho)^\gamma$, где $1 \leqslant \gamma \leqslant {}^5/_3$, т. е. уравнений состояний, представляющих практический интерес.

Особые решения для произвольного уравнения изэнтропы, очевидно, имеют вид

$$x = (v \pm c_m)t + F(v); \quad v = \pm\int c_m\, d\ln\rho = \pm\int\sqrt{c^2 + \frac{\mu b^2\rho}{4\pi}}\, d\ln\rho, \tag{18}$$

где $F(v)$ — произвольная функция скорости.

Не представляет больших трудностей обобщение этого метода на случай цилиндрического, а при некоторых условиях и сферического движения, а также и на случай неадиабатических движений газа.

Поступило
22 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. Альфен, Космическая электродинамика, ИЛ, 1952. [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1953.