

Ю. М. КАГАН и В. И. ПЕРЕЛЬ

К ТЕОРИИ ШАРОВОГО ЗОНДА В ПЛАЗМЕ

(Представлено академиком А. А. Лебедевым 16 I 1954)

В настоящей работе рассматривается теория шарового зонда в плазме при низких давлениях с учетом того обстоятельства, что зонд является стоком заряженных частиц. Мы будем считать, что все частицы, достигшие зонда, теряют заряд. Пусть шаровой зонд радиуса a помещен в безграничную плазму. Наше рассмотрение справедливо, если область плазмы, возмущенная зондом, мала по сравнению с размерами трубки и длиной свободного пробега частиц. Если задана разность потенциалов $\varphi(a)$ между зондом и невозмущенными частями плазмы, то вокруг зонда создается центрально-симметричное поле $\varphi(r)$, в котором частицы испытывают рассеяние. Если u — скорость частицы на расстоянии r от зонда, а v — скорость вдали от зонда, то из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - e\varphi(r), \quad (1)$$

где e — заряд частицы, включая знак. Вводя угол ϑ между направлением скорости в точке r и радиусом-вектором, направленным из центра зонда в эту точку, получим из закона сохранения момента

$$pv = ru \sin \vartheta, \quad (2)$$

где p — прицельный параметр. Будем искать функцию распределения частиц по скоростям $f(u\vartheta r)$, считая, что вдали от зонда она изотропна и равна $f_\infty(v)$. Рассмотрим сначала случай задерживающего поля $e\varphi(r) > 0$. Для определенности будем рассматривать электроны в задерживающем поле зонда. Рассмотрим слой электронов с прицельным параметром в интервале $p, p + dp$, начальной скоростью в интервале $v, v + dv$ и летящих к зонду будет $vf_\infty(v) \cdot 4\pi v^2 dv \cdot 2\pi p dp$. Вводя вместо p и v переменные u и ϑ и учитывая, что время, которое такие ивне летящие электроны проводят в слое, $d\tau = \frac{dr}{u |\cos \vartheta|}$, получим, что $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ $f(u\vartheta r) = f_\infty(v)$. Изнутри в слой пройдут лишь те частицы, которые не попадут на зонд в силу закона сохранения энергии или закона сохранения момента. Последнее будет иметь место при

$$p > a \frac{u(a)}{v}. \quad (3)$$

Вводя

$$\sin \vartheta_{ru} = \frac{au(a)}{ru(r)}, \quad \vartheta_{ru} < \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

получим окончательно для функции распределения:

$$\left. \begin{aligned} f(u\vartheta r) &= f_{\infty}(v), & \pi > \vartheta > \vartheta_{ru}, \\ f(u\vartheta r) &= 0, & \vartheta_{ru} > \vartheta > 0, \end{aligned} \right\} \text{ для } \frac{mu^2}{2} > e[\varphi(a) - \varphi(r)];$$

$$f(u\vartheta r) = f_{\infty}(v), \quad \pi > \vartheta > 0, \quad \text{для } \frac{mu^2}{2} < e[\varphi(a) - \varphi(r)];$$
(5)

ϑ_{ru} имеет смысл угла экранирования частиц зондом, при отсутствии поля он приобретает простой геометрический смысл.

Пользуясь формулами (5), легко найти полный поток электронов на завод и концентрацию электронов на расстоянии r от зонда. Считая распределение $f_{\infty}(v)$ максвелловским, получим для полного потока F обычную формулу

$$F = \frac{Sn_{\infty}\bar{v}}{4} e^{-e\varphi(a)/kT_e}, \quad (6)$$

где S — площадь поверхности зонда; n_{∞} — концентрация электронов вдали от зонда; \bar{v} и T_e — средняя скорость и температура электронов в плазме. Для концентрации электронов $n_e(r)$ найдем

$$n_e(r) = n_{\infty} e^{-e\varphi(r)/kT_e} - \frac{1}{2} n_{\infty} e^{-e\varphi(a)/kT_e} \left\{ e^x [1 - \Phi(\sqrt{x})] - \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} e^{\frac{x}{1-a^2/r^2}} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{x}{1-a^2/r^2}}\right) \right] \right\}, \quad (7)$$

где $x = \frac{e[\varphi(a) - \varphi(r)]}{kT_e}$ и $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2} dz$ — интеграл вероятности.

Отметим, что выражение в фигурной скобке всегда положительно и изменяется от 1 при $r = a$ до 0 при $r \rightarrow \infty$.

Из формулы (7) видно, что концентрация электронов вблизи зонда меньше, чем если бы они были распределены по формуле Больцмана, причем вдали от зонда это различие невелико, а при приближении к поверхности зонда концентрация становится меньше «больцмановской» концентрации в два раза. Этот более быстрый спад концентрации связан с отсасывающим действием зонда. Вместе с тем, как это следует из формулы (6), обеднение плазмы электронами вблизи зонда не нарушает прямолинейного хода полулогарифмической вольт-амперной характеристики в области отрицательных потенциалов вплоть до потенциала пространства. Поэтому встречающееся в литературе утверждение, что обеднение может вызывать замедление роста электронного тока при отрицательных потенциалах зонда, близких к потенциалу пространства, представляется неправильным. С излагаемой точки зрения правильным, хотя и трудно выполнимым методом определения потенциала пространства будет определение по началу отклонения от прямолинейности вольт-амперной характеристики.

В случае притяжения рассуждения усложняются. Минимальное расстояние r_{\min} , на которое частица может приблизиться к зонду, зависит от ее прицельного расстояния p и находится из уравнения

$$2m \left[\frac{mv^2}{2} - e\varphi(r_{\min}) \right] - \frac{m^2 v^2 p^2}{r_{\min}^2} = 0, \quad (8)$$

откуда для прицельного расстояния $p_v(r_{\min})$, которое должна иметь частица данной скорости v , чтобы приблизиться к зонду до расстояния r , получим

$$p_v^2(r_{\min}) = r_{\min}^2 \left[1 - \frac{2e\varphi(r_{\min})}{mv^2} \right] = r_{\min}^2 \frac{u^2(r_{\min})}{v^2}. \quad (9)$$

Для случая отталкивания $p_v(r_{\min})$ есть монотонная функция от r_{\min} , так как при возрастании r_{\min} возрастает $u(r_{\min})$. Условием того, что частица не попадет на зонд, будет $r_{\min} \geq a$ и, следовательно, $p \geq p_v(a)$, что совпадает с ранее введенным условием (3).

В случае притяжения $e\varphi(r) < 0$, $u(r_{\min})$ убывает с возрастанием r_{\min} и функция $p_v(r)$ может иметь минимум при некотором значении $r = r_0$. Очевидно, что формула (9) имеет физический смысл при $r > r_0$. Только в этой области $p_v(r_{\min})$, получаемый из формулы (9), имеет физический смысл прицельного параметра. При прицельных параметрах $p < p_v(r_0)$ имеет место лимитационное движение, при котором частица падает на зонд.

Как видно из (9), лимитационное движение будет иметь место, если $\varphi(r)$ меняется с расстоянием быстрее чем $1/r^2$. Сфера радиуса r_0 играет для частиц v роль границы зонда. Уравнение для r_0 получим, приравняв нулю производную от p_v^2 по r_{\min} , откуда найдем

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi(r_0) + \frac{r_0}{2} e\varphi'(r_0). \quad (10)$$

Найдем теперь выражение для функции распределения частиц для случая притяжения. Рассмотрим слой dr на расстоянии r от зонда. Следует различать случаи $r > r_0$ и $r < r_0$.

При $r > r_0$, повторяя рассуждения, проведенные для случая отталкивания, заменив a через r_0 и $u(a)$ через $u(r_0)$, получим:

$$\left. \begin{aligned} f(u\vartheta r) &= f_\infty(v), & \pi > \vartheta > \vartheta'_{ru}, \\ f(u\vartheta r) &= 0, & \vartheta'_{ru} > \vartheta > 0, \end{aligned} \right\} \text{ для } \frac{mu^2}{2} + e\varphi(r) > 0; \quad (11)$$

$$f(u\vartheta r) = 0, \quad \pi > \vartheta > 0, \quad \text{для } \frac{mu^2}{2} + e\varphi(r) < 0;$$

$$\sin \vartheta'_{ru} = \frac{r_0 u(r_0)}{ru(r)}, \quad \vartheta'_{ru} < \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

При $r < r_0$ войдут в слой частицы, для которых $p < p_v(r_0)$, т. е. для которых $\sin \vartheta < r_0 u(r_0) / ru(r)$. Летящих от зонда частиц данной скорости в слое не будет. Для функции распределения получим, таким образом,

$$\left. \begin{aligned} f(u\vartheta r) &= f_\infty(v), & \pi > \vartheta > \vartheta''_{ru}, \\ f(u\vartheta r) &= 0, & \vartheta''_{ru} > \vartheta > 0, \end{aligned} \right\} \text{ для } \frac{mu^2}{2} + e\varphi(r) > 0; \quad (13)$$

$$f(u\vartheta r) = 0, \quad \pi > \vartheta > 0, \quad \text{для } \frac{mu^2}{2} + e\varphi(r) < 0;$$

$$\sin \vartheta''_{ru} = \frac{r_0 u(r_0)}{ru(r)}, \quad \vartheta''_{ru} > \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

Из (10) видно, что r_0 зависит от v , поэтому разделение пространства на две области должно проводиться отдельно для каждой скорости.

Так как ход потенциала в окрестности зонда заранее неизвестен то мыслимы две возможности.

1. Ход потенциала таков, что лимитационное движение отсутствует. В этом случае в формулах (11), (12) следует заменить r_0 на a , а $u(r_0)$ на $u(a)$. Формулы (13), (14) в этом случае теряют смысл.

Для полного потока частиц на зонд получим

$$F = \frac{Sn_\infty \bar{v}}{4} \left[1 - \frac{e\varphi(a)}{kT} \right], \quad (15)$$

где n_∞ , \bar{v} и T — концентрация, средняя скорость и температура частиц в невозмущенной плазме. Эта формула совпадает с формулой обычной теории для сферического зонда, полученной для толстых слоев Ленгмюра. Аналогично случаю отталкивания можно получить выражение для концентрации частиц в окрестности зонда. Как известно, формула (15) находится в противоречии с экспериментом, она приводит к слишком большим значениям беспорядочного ионного тока.

2. Поэтому следует считать, что на самом деле осуществляется вторая возможность, т. е. ход потенциала таков, что имеет место лимитационное движение. Для полного потока в этом случае получаем

$$F = \int_0^\infty 4\pi r_0^2 \left[v^2 - \frac{2e}{m} \varphi(r_0) \right] f_\infty(v) v dv. \quad (16)$$

Если имеет место лимитационное движение, то формула (15) действительно дает завышенное значение потока, ибо она получается из (16) заменой r_0 на a и $\varphi(r_0)$ на $\varphi(a)$, а выражение $r^2 \left[v^2 - \frac{2e}{m} \varphi(r) \right]$ минимально при $r = r_0$.

Величины r_0 и, следовательно, $\varphi(r_0)$ являются неизвестными функциями v . Для нахождения их необходимо совместное решение уравнения Пуассона с уравнением (10), что представляет значительные математические трудности. Наличие вокруг зонда сферы, поглощающей притягивающиеся частицы, было отмечено в работе (1). Оценка величины ионного тока на зонд при достаточно больших отрицательных потенциалах зонда была сделана в работе (2), причем наблюдалось согласие с экспериментом.

Карело-финский государственный университет
Карело-финский педагогический институт

Поступило
29 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Wenzl, Zs. f. angew. Phys., 2, 59 (1950). ² Ю. М. Каган, В. И. Перель, ДАН, 91, 1321 (1953).