Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 4

ФИЗИКА

Б. Л. ИОФФЕ

СИСТЕМЫ КОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком А. И. Алихановым 18 I 1954)

В работе [1] В. А. Фоком была предложена точная (без разложения по степеням $e^2/\hbar c$) система уравнений квантовой электродинамики в виде бесконечной совокупности «зацепляющихся» уравнений. В этих уравнениях, однако, не учитывалась возможность образования электронно-позитронных пар и сами уравнения были записаны в сугубо нековариантном виде, что сделало бы затруднительным в уравнениях Фока однозначное исключение появляющихся в теории бесконечностей типа собственной массы и заряда. В других работах [2-4], посвященных тому же вопросу, либо уравнения оставались не ковариантными [2,3], либо ковариантность достигалась искусственным введением дополнительного временного параметра σ, физический смысл которого оставался весьма неясным [4]. При этом в уравнениях, предлагаемых в работах [2-4], приходится отдельно рассматривать переходы в состояния с положительной и отрицательной энергией (изображаемые одной линией в диаграммах Фейнмана), что резко увеличивает число членов в уравнениях и делает сами уравнения в общем виде необозримыми.

В настоящей работе производится вывод точной (т. е. без разложения по $e^2/\hbar c$) системы релятивистски-ковариантных уравнений. Для простоты мы будем рассматривать случай нуклонного поля, взаимодействующего с нейтральным псевдоскалярным мезонным полем, хотя изложенный ниже метод может быть без труда применен к квантовой электродинамике или к заряженным мезонным полям.

Рассмотрим задачу о движении одного нуклона. Будем исходить из уравнения для нуклонной функции Грина $G(x, x')$, которое, согласно работе [5], для случая псевдоскалярной нейтральной теории имеет вид*:

$$\left\{i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m + ig\gamma_5 \langle\varphi(x)\rangle g\gamma_5 \frac{\delta}{\delta J(x)}\right\} G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (1)$$

В (1) $\langle\varphi(x)\rangle$ — внешнее мезонное поле (с учетом поляризации нуклонного вакуума), подчиняющееся уравнению

$$(\Box - \mu^2)\langle\varphi(x)\rangle = -4\pi J(x) - 4\pi g \operatorname{Sp}\gamma_5 G(x, x); \quad (2)$$

$J(x)$ — внешний нуклонный ток, а $\delta/\delta J(x)$ обозначает [1, 5] функциональную производную по току, взятую в точке x. Мы исполь-

* Эта запись уравнения для функции Грина выбрана из тех соображений, чтобы из получающейся системы уравнений легко было установить соответствие с системой, следующей непосредственно из уравнений, записанных в гейзенберговском представлении, и с уравнениями Фока [1], хотя данная запись и менее удобна при рассмотрении задач со многими мезонами и для проведения перенормировок массы и заряда.

зуем систему единиц, где $\hbar = c = 1$, и в наших обозначениях $a_\mu b_\mu = a_4 b_4 - \vec{a}\vec{b}$, $\mathbf{a} = a_\mu \gamma_\mu$, $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$, $\gamma_5^2 = 1$, $\delta_{44} = 1$, $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -1$.

Граничные условия к уравнениям (1), (2) соответствуют наличию на бесконечности расходящихся волн при $t > t'$ и сходящихся при $t < t'$. В теории возмущений это эквивалентно прибавлению к массе малой отрицательной мнимой добавки.

Перейдем в (1) и (2) к импульсному представлению, положив

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ipx} e^{-ip'x'} G(x, x')\, d^4x\, d^4x', \tag{3}$$

и, кроме того, введем новые функции $\varphi' = -ig\varphi$ и $J' = 4\pi i g J$. Тогда (опуская штрихи) получим следующие уравнения ($\lambda = g^2 / 4\pi^3 i$):

$$(\mathbf{p} - m) G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \gamma_5 \int \langle \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \rangle G(\mathbf{k}, \mathbf{p}')\, d^4k - \\ - \lambda \gamma_5 \int \frac{\delta G(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p}')}{\delta J(\mathbf{k})} d^4k = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'); \tag{4}$$

$$(\mathbf{k}^2 - \mu^2) \langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle = J(\mathbf{k}) - \lambda\, \mathrm{Sp}\, \gamma_5 \int G(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p})\, d^4p. \tag{5}$$

Сделаем теперь предположение, являющееся весьма общим, что функция Грина $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, которая есть функционал от внешнего нуклонного тока $J(\mathbf{p})$, разлагается в функциональный ряд Тейлора по току

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) J(\mathbf{s}_1) \ldots J(\mathbf{s}_n)\, d^4s_1 \ldots d^4s_n \tag{6}$$

и, аналогично,

$$\langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int \varphi_n(\mathbf{k}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) J(\mathbf{s}_1) \ldots J(\mathbf{s}_n)\, d^4s_1 \ldots d^4s_n. \tag{7}$$

Подставим разложения (6), (7) в (4), (5) и приравняем коэффициенты в правых и левых частях уравнений (4), (5) при произведениях $J(\mathbf{s}_1) \ldots J(\mathbf{s}_n)$. Рассмотрим сначала уравнение для $\varphi_0(\mathbf{k})$. Оно имеет вид

$$(\mathbf{k}^2 - \mu^2) \varphi_0(\mathbf{k}) = -\lambda\, \mathrm{Sp}\, \gamma_5 \int G_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p})\, d^4p.$$

Но $G_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p})$ зависит только от двух векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ и не может содержать γ_5, так что $\mathrm{Sp}\, \gamma_5 G_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{p}) = 0$ и

$$\varphi_0(\mathbf{k}) = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) соответствует (в терминах S-матрицы) отбрасыванию замкнутых петель, не связанных с основной нуклонной линией. Благодаря (8) мы можем положить

$$\varphi_n(\mathbf{k}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) = D_{n-1}(\mathbf{k}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n). \tag{9}$$

Будем G_n и D_n искать в виде

$$G_n(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n) = G_n(\mathbf{p}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n)\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{s}_1 - \ldots - \mathbf{s}_n); \tag{10}$$

$$D_n(\mathbf{k}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{n+1}) = D_n(\mathbf{k}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n)\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{s}_1 - \ldots - \mathbf{s}_{n+1}). \tag{11}$$

Подставляя (10), (11) в (6), (7), а (6), (7) в (4), (5), приходим к бесконечной системе «зацепляющихся» уравнений для функций G_n и D_n:

$$(\mathbf{p}-m)\,G_n(\mathbf{p},\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n)-$$
$$-\gamma_5\sum_{m=0}^{n-1}D_{n-m-1}\Big(\sum_{l=1}^{n-m}\mathbf{s}_l,\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_{n-m-1}\Big)G_m\Big(\mathbf{p}-\sum_{l=1}^{n-m}\mathbf{s}_l,\mathbf{s}_{n-m+1},\ldots,\mathbf{s}_n\Big)-$$
$$-\lambda\gamma_5\sum_{i=1}^{n+1}\int G_{n+1}(\mathbf{p}+\mathbf{k},\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_{i-1},\mathbf{k},\mathbf{s}_i,\ldots,\mathbf{s}_n)\,d^4k=\delta_{n,0}; \qquad (12)$$

$$(\mathbf{k}^2-\mu^2)\,D_n(\mathbf{k},\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n)+\lambda\,\mathrm{Sp}\,\gamma_5\int G_{n+1}\Big(\mathbf{p},\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n,\mathbf{k}-\sum_{l=1}^{n}s_l\Big)d^4p=\delta_{n,0}. \qquad (13)$$

Как следует из (6), (7), (9), $G_n(\mathbf{p},\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n)$ и $D_n(\mathbf{k},\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n)$ должны быть симметричными функциями переменных $\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n$. Однако уравнения (12), (13) выглядят несимметричными по переменным $\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n$. Поэтому требование симметрии должно быть наложено дополнительно. Нужно заметить, что, предполагая дальнейшую симметризацию, в левой части уравнения (12) можно было бы опустить суммирование по i, заменив его умножением на $n+1$. Это не сделано для того, чтобы при решении методом теории возмущений получались правильные результаты без дополнительной симметризации. Чтобы уяснить смысл функций G_n и D_n, напишем несколько первых уравнений (12) и (13):

$$(\mathbf{p}-m)\,G_0(\mathbf{p})-\lambda\gamma_5\int G_1(\mathbf{p}+\mathbf{k},\mathbf{k})\,d^4k=1; \qquad (14)$$

$$(\mathbf{p}-m)\,G_1(\mathbf{p},\mathbf{s})-\gamma_5D_0(\mathbf{s})\,G_0(\mathbf{p}-\mathbf{s})-$$
$$-\lambda\gamma_5\int\{G_2(\mathbf{p}+\mathbf{k},\mathbf{k},\mathbf{s})+G_2(\mathbf{p}+\mathbf{k},\mathbf{s},\mathbf{k})\}\,d^4k=0; \qquad (15)$$

$$(\mathbf{k}^2-\mu^2)\,D_0(\mathbf{k})+\lambda\,\mathrm{Sp}\,\gamma_5\int G_1(\mathbf{p},\mathbf{k})\,d^4p=1. \qquad (16)$$

Оборвем систему уравнений (12) на втором члене, т. е. положим $G_2=0$. Тогда из (15) имеем

$$G_1(\mathbf{p},\mathbf{s})=(\mathbf{p}-m)^{-1}\gamma_5G_0(\mathbf{p}-\mathbf{s})\,D_0(\mathbf{s}), \qquad (17)$$

а подстановка (17) в (14) дает для $G_0(\mathbf{p})$ уравнение

$$\Big\{\mathbf{p}-m-\lambda\gamma_5\int(\mathbf{p}+\mathbf{k}-m)^{-1}\gamma_5D_0(\mathbf{k})\,d^4k\Big\}\,G_0(\mathbf{p})=1. \qquad (18)$$

Как и следовало ожидать, появившийся в фигурных скобках член есть первая поправка к собственной массе нуклона (если в качестве $D_0(\mathbf{k})$ взять нулевое приближение $D_0^{(0)}(\mathbf{k})=1/(\mathbf{k}^2-\mu^2)$), причем в этом выражении нужно еще, конечно, произвести перенормировку.

Легко убедиться, что все поправки к собственной массе нуклона более высокого порядка по g^2 получатся, если уравнения (12), (13) решать методом итераций. При этом члены вида $D_{n-m-1}G_m$ будут описывать вставку в собственно-энергетические диаграммы замкнутых петель.

Из (17) следует, что в данном приближении $G_1(\mathbf{p},\mathbf{s})$ представляет собой простейшую вершинную часть ([6]), соответствующую испусканию мезона с импульсом $\mathbf{s}$, с той только разницей, что вместо внешних линий стоят функции Грина нуклона $(\mathbf{p}-m)^{-1}$ и $G_0(\mathbf{p}-\mathbf{s})$ и мезона $D_0(\mathbf{s})$.

Связь между $G_1(\mathbf{p},\mathbf{s})$ и вершинной частью $G_1(\mathbf{p},\mathbf{s})=G_0(\mathbf{p})\times\times\Gamma_5(\mathbf{p},\mathbf{s})\,G_0(\mathbf{p}-\mathbf{s})\,D_0(\mathbf{s})$ имеет место и в общем случае, как следует из определения ([5]) вершинной части $\Gamma_5(\mathbf{k};\mathbf{p},\mathbf{p}')$:

$$\Gamma_5(\mathbf{k};\mathbf{p},\mathbf{p}')=\frac{\delta G^{-1}(\mathbf{p},\mathbf{p}')}{\delta\langle\varphi(\mathbf{k})\rangle}\Big|_{J=0}=$$
$$=\int G^{-1}(\mathbf{p},\mathbf{p}'')\,\frac{\delta G(\mathbf{p}'',\mathbf{p}''')}{\delta J(\mathbf{k}')}\,G^{-1}(\mathbf{p}''',\mathbf{p}')\,D^{-1}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\,d^4k'd^4p''d^4p'''\,\Big|_{J=0},$$

если учесть закон сохранения импульса (формулы (10), (11)).

Рассматривая формулы (12), (13), нетрудно увидеть, что, вообще, функции $G_n(\mathbf{p}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n)$ соответствует совокупность диаграмм с двумя внешними нуклонными (с импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{s}_i$) и n внешними мезонными линиями (с импульсами $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$), а функции $D_n(\mathbf{k}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n)$ соответствует совокупность диаграмм с $n+2$ внешними мезонными линиями, импульсы которых равны $\mathbf{k}, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n, \mathbf{k} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{s}_i$ (замкнутые петли с $n+2$ вершинами). Точная функция Грина для системы нуклон $+n$ мезонов отличается от функции G_n только слагаемым, описывающим свободное движение. Аналогичная ситуация имеет место для D_n.

Так например, функция $G_2(\mathbf{p}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ описывает процесс рассеяния мезона на нуклоне и связана с точной функцией Грина G_{MN} для системы мезон — нуклон соотношением

$$G_{MN}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{s}, \mathbf{s}') = G_0(\mathbf{p}) D_0(\mathbf{s}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}') - \\ - \frac{g^2}{(4\pi^3)^2} [G_2(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{s}') + G_2(\mathbf{p}, \mathbf{s}', \mathbf{s})] \times \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{s} - \mathbf{s}').$$

Этого можно было ожидать и заранее, поскольку, как известно (см., например, ([7])), функция Грина для системы мезон — нуклон получается взятием второй функциональной производной от $G(x, x')$ по внешнему току. При помощи функции G_2 можно решать как задачи о рассеянии мезонов на нуклонах, так и задачи о связанных состояниях системы мезон — нуклон. В последнем случае ψ-функция системы может быть определена из уравнения $G_{MN}^{-1} \psi_{MN} = 0$.

В заключение автор хотел бы отметить, что настоящая работа не могла бы быть проведена без ценных советов и обсуждений с А. Д. Галаниным и И. Я. Померанчуком, которым он выражает свою горячую благодарность.

Поступило
2 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Фок, Sow. Phys., **6**, 425 (1934). [2] И. Е. Тамм, J. of Physics, **9**, 445 (1945). [3] F. J. Dyson, Phys. Rev., **90**, 994 (1953). [4] M. Cini, Nuovo Cim., **10**, 526, 613 (1953). [5] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452, 455 (1951). [6] F. J. Dyson, Phys. Rev., **75**, 1736 (1949). [7] R. Utiyama, S. Sunakata, T. Imamura, Progr. Theor. Phys., **8**, 77 (1952).