Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. СВЕКЛО

ЗАДАЧА ЛЭМБА ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 I 1954)

Строгое решение задачи о действии сосредоточенного источника колебаний на границе упругой полуплоскости при условии, что граница свободна от напряжений, дано впервые в работах В. И. Смирнова и С. Л. Соболева. Ниже приводится решение задачи Лэмба при некоторых смешанных краевых условиях. Рассматривается действие касательного мгновенного импульса.

Постановка задачи и ее решение. Рассматривается однородная упругая полуплоскость $y<0$ с границей $y=0$, находящаяся при $t<0$ в покое. В момент $t=0$, в начале $x=y=0$ выбранной системы отсчета действует мгновенный касательный импульс $\sigma_y=0$, $\tau_{xy}\neq 0$. К понятию введенного здесь сосредоточенного в пространстве и времени воздействия приходим обычным путем, рассматривая предельный случай непрерывно распределенной касательной нагрузки. Таким образом, при $t>0$ вдоль всей границы $\tau_{xy}=0$. Далее, при $t>0$ предположим выполненными условия: $\sigma_y=0$, если $x>0$, и $v=0$, если $x<0$, где v — нормальная к границе составляющая вектора упругого смещения. Механически граничные условия слева от начала координат могут быть истолкованы как прилипание без трения к абсолютно жесткому телу. Требуется найти движение среды, т. е. упругие потенциалы $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$, имеющие в условиях нашей задачи представление $\varphi=\operatorname{Re}\Phi(\theta_1)$, $\psi=\operatorname{Re}\Psi(\theta_2)$, где Φ и Ψ — аналитические в верхней полуплоскости функции; θ_1 и θ_2 определены соотношениями $t-\theta_1 x-\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_1^2}\,y=0$, $t-\theta_2 x-\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_2^2}\,y=0$; a и b — скорости продольных и поперечных колебаний. Радикалы считаем положительными на верхних берегах разрезов.

Запишем условия для функций Φ и Ψ на границе области. Равенство нулю τ_{xy} вдоль всей границы при $t>0$ дает для всех $\theta=\theta_1=\theta_2$:

$$\operatorname{Re}\left[2\theta\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\,\Phi'+\left(\frac{1}{b^2}-2\theta^2\right)\Psi'\right]=0. \tag{1}$$

Из условия $\sigma_y=0$, если $x>0$, и $v=0$, если $x<0$, выводим, соответственно:

$$\operatorname{Re}\left[-\left(\frac{1}{b^2}-2\theta^2\right)\Phi'+2\theta\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}\,\Psi'\right]=0,\qquad \theta>0; \tag{2}$$

$$\operatorname{Re}\left[-\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}\,\Phi'+\theta\Psi'\right]=0,\qquad \theta<0. \tag{3}$$

Функция под знаком Re в (1) должна разлагаться в ряд Лорана с неотрицательными степенями в окрестности особой точки $\theta=\infty$, и мы получим:

$$2\theta\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\,\Phi'+\left(\frac{1}{b^2}-2\theta^2\right)\Psi'=i\alpha, \tag{4}$$

где α — вещественная постоянная. Так же как в обычной задаче Лэмба, будем считать функции Φ' и Ψ' ограниченными на бесконечности. Положим

$$-\left(\frac{1}{b^2}-2\theta^2\right)\Phi'+2\theta\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}\,\Psi'=A(\theta), \tag{5}$$

$$-\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}\,\Phi'+\theta\Psi'=B(\theta). \tag{6}$$

Тогда A и B суть, соответственно, ограниченная и исчезающая на бесконечности функции. Исключая из (4), (5) и (6) Φ' и Ψ', получим:

$$B(\theta)F(\theta)-\theta\left(\frac{1}{b^2}-2\Delta\right)i\alpha=\frac{1}{b^2}\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\,A(\theta), \tag{7}$$

где $F(\theta)=\left(\frac{1}{b^2}-2\theta^2\right)^2+4\theta^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}$ — функция Релея и $\Delta=\theta^2+\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}$.

Для решения нашей задачи достаточно найти $A(\theta)$. Условия на границе полуплоскости для функции $A(\theta)$ легко могут быть выведены. Из (2), (3) и (7) следует: $\operatorname{Re}A(\theta)=0$, если $\theta>-1/a$; далее, из (7) и условия $\operatorname{Re}B(\theta)=0$ для $\theta<0$ выводим:

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\,A(\theta)+\theta\left(\frac{1}{b^2}-2\Delta\right)i\alpha}{F(\theta)}\right]=0,\quad -\frac{1}{b}<\theta<-\frac{1}{a};\\ \operatorname{Im}A(\theta)=0,\quad \theta<-\frac{1}{b}.\end{gathered} \tag{8}$$

Функция $A(\theta)$, таким образом, аналитически продолжается на участке $\theta<-1/b$, принимая в точках, симметричных относительно действительной оси, комплексно-сопряженные значения. Полагая $\operatorname{Re}A(\theta)=f(\theta)$ на участке $-1/b<\theta<-1/a$, легко найдем $A(\theta)$, отобразив предварительно плоскость, разрезанную вдоль луча $\theta>-1/b$, на верхнюю полуплоскость и возвращаясь затем к старой переменной θ:

$$A(\theta)=\frac{\sqrt{1/b-\theta}}{2\pi i}\int\limits_{-1/b}^{-1/a}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{1/b+\xi}\,(\xi-\theta)}=\sqrt{\frac{1}{b}+\theta}\;\chi(\theta), \tag{9}$$

где $\sqrt{1/b+\theta}$ положителен на верхнем берегу разреза, $\theta>-1/b$.

Используя первое из условий (8), приходим к следующей задаче линейного сопряжения для функции $\chi(\theta)$:

$$\overline{F}(\xi)\chi^+(\xi)+F(\xi)\chi^-(\xi)=4i\alpha\xi\sqrt{\frac{1}{b}-\xi}\left(\frac{1}{b^2}-2\xi^2\right)\frac{1}{b^2},\ -\frac{1}{b}<\xi<-\frac{1}{a}, \tag{10}$$

где $\overline{F}(\xi)=\left(\frac{1}{b^2}-2\xi^2\right)-4\xi^2\sqrt{\frac{1}{b^2}-\xi^2}\sqrt{\frac{1}{a^2}-\xi^2}$, а $\chi^+(\xi)$ и $\chi^-(\xi)$ суть граничные значения функции $\chi(\theta)$ сверху и снизу на участке $-1/b<\xi<-1/a$.

Решение задачи (10), удовлетворяющее условию $\overline{\chi(\overline{\theta})}=-\chi(\theta)$, дается формулой

$$\chi(\theta)=\alpha\frac{X(\theta)}{2\pi}\int\limits_{-1/b}^{-1/a}\frac{g_1(\xi)\,d\xi}{\overline{F}(\xi)\,X^+(\xi)\,(\xi-\theta)}+i\beta X(\theta), \tag{11}$$

где β — вещественная постоянная, а $X(\theta) = \dfrac{\exp\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-1/b}^{-1/a} \ln G_1(\xi)\,\dfrac{d\xi}{\xi-\theta}\right]}{\sqrt{\dfrac{1}{b}+\theta}\,\sqrt{\dfrac{1}{a}+\theta}} =$

$$= \frac{X_0(\theta)}{\sqrt{\dfrac{1}{b}+\theta}\,\sqrt{\dfrac{1}{a}+\theta}}, \quad g_1(\xi) = 4\xi\sqrt{\frac{1}{b}-\xi}\left(\frac{1}{b^2}-2\xi^2\right)\frac{1}{b^2}, \quad G_1(\xi) = \frac{F(\xi)}{\overline{F}(\xi)}.$$

Из (4) и (5) находим:

$$\Phi'(\theta) = \frac{2\theta\sqrt{\dfrac{1}{b^2}-\theta^2}\, i\alpha - \left(\dfrac{1}{b^2}-2\theta^2\right)A(\theta)}{F(\theta)},$$

$$\Psi'(\theta) = \frac{\left(\dfrac{1}{b^2}-2\theta^2\right)i\alpha + 2\theta\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-\theta^2}\, A(\theta)}{F(\theta)}.$$

Постоянную β в (11) определим из условия ограниченности $\Phi'(\theta)$ и $\Psi'(\theta)$ при $\theta = -1/c$, где c — скорость волны Релея. В самом деле, часть границы упругой полуплоскости, где $x<0$, не свободна от напряжений, и, следовательно, в этой части границы поверхностные волны Релея не могут иметь места. Таким образом, должно быть:

$$-\frac{2}{c}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}\, i\alpha - \left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)A\left(-\frac{1}{c}\right) = 0,$$

что дает

$$\beta = -\left[\frac{\dfrac{2}{c}\sqrt{\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}}\sqrt{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}}}{X_0\left(-\dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{2}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)} + \frac{1}{2\pi}\int_{1/b}^{1/a} \frac{g_1(\xi)\sqrt{\xi-\dfrac{1}{a}}\sqrt{\dfrac{1}{b}+\xi}}{\overline{F}(\xi)\,X_0^{+}(\xi)\left(\xi+\dfrac{1}{c}\right)}\right]\alpha.$$

Полагая $A(\theta) = i\alpha A_1(\theta)$, найдем окончательно:

$$\Phi'(\theta) = i\alpha\,\frac{2\theta\sqrt{\dfrac{1}{b^2}-\theta^2} - \left(\dfrac{1}{b^2}-2\theta^2\right)A_1(\theta)}{F(\theta)},$$

$$\Psi'(\theta) = i\alpha\,\frac{\left(\dfrac{1}{b^2}-2\theta^2\right) + 2\theta\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-\theta^2}\, A_1(\theta)}{F(\theta)}. \qquad (12)$$

Постоянная α определяется по заданной интенсивности импульса.

В самом деле, при больших значениях θ членами в решении (12), содержащими $A_1(\theta)$, можно пренебречь, так как $A_1(\theta)$ исчезает на бесконечности; но тогда решение (12) совпадет с известным решением обычной задачи Лэмба, когда отлична от нуля лишь касательная составляющая Q импульса. Таким образом, $\alpha = Q/2\pi$.

Нетрудно проверить также, что вещественные части функции Φ' и Ψ' на участке $-1/a < \theta < 1/a$ равны нулю, что соответствует наличию фронта возмущения. Решение (12) отвечает, таким образом, всем условиям первоначально поставленной задачи.

Поступило
15 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, 1937. [2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.