Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. И. КЕИЛИС-БОРОК

О РАСПРОСТРАНЕНИИ КОЛЕБАНИЙ В МНОГОСЛОЙНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Г. А. Гамбурцевым 26 I 1954)

Рассмотрим идеально упругое n-слойное полупространство [1] $z > -z_1$, в каждом из слоев которого среда однородна и изотропна, причем контакт на границах жесткий, а при $z = -z_1$ напряжения равны нулю вне источника. Пусть в слоях или на границах заданы силы или напряжения, симметричные относительно фиксированной нормали к границе (оси z) и представимые в виде интегралов Фурье по времени t и по расстоянию r от оси z; не нарушая общности, можно считать, что спектр по t не зависит от r, а спектр по r — от t. Найдем асимптотическое представление смещений при больших r.

Разделяя переменные, можно представить соответствующее решение волновых уравнений в виде:

$$v_q^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} U(p)\, e^{ipt}\, \tilde{v}_q^{(j)}(p, r, z)\, dp; \tag{1}$$

$$\tilde{v}_q^{(j)} = \int_{l(p)} \frac{g_q^{(j)}(\xi, r, p)}{\Delta_n(\xi, z, p)}\, J_{2-j}(\xi r)\, d\xi; \tag{2}$$

$$g_q^{(1)} = i\xi\left[A_{4q-3}\operatorname{ch}\alpha_q z + A_{4q-2}\frac{\operatorname{sh}\alpha_q z}{\alpha_q}\right] + \beta_q\left[\Delta_{4q-1}\operatorname{sh}\beta_q z + \Delta_{4q}\frac{\operatorname{ch}\beta_q z}{\beta_q}\right];$$

$$g_q^{(2)} = \alpha_q\left[A_{4q-3}\operatorname{sh}\alpha_q z + A_{4q-2}\frac{\operatorname{ch}\alpha_q z}{\alpha_q}\right] - i\xi\left[A_{4q-1}\operatorname{ch}\beta_q z + A_{4q}\frac{\operatorname{sh}\beta_q z}{\beta_q}\right]$$

$$(q = 1, 2, \ldots, n);$$

$$g_{n+1}^{(1)} = i\xi A_{4n+1} e^{-\alpha_{n+1} z} + \beta_q A_{4n+2} e^{-\beta_{n+1} z};$$

$$g_{n+1}^{(2)} = \alpha_{n+1} A_{4n+1} e^{-\alpha_{n+1} z} - i\xi A_{4n+2} e^{-\beta_{n+1} z}.$$

Здесь $v_q^{(1)}$, $v_q^{(2)}$ — компоненты смещения в q-м слое по r и по z, соответственно; $\tilde{v}_q^{(j)}$ — смещения от стационарного источника с частотой p, распределенного в пространстве так же, как рассматриваемый нестационарный источник; $U(p)$ — спектр источника по t; контур l идет от 0 до ∞ вдоль действительной оси, обходя особые точки сверху по малым полуокружностям; Δ_n — определитель системы граничных условий, исследованный в [1]; A_i — определитель, получающийся из Δ_n заменой элементов i-го столбца следующими величинами: нулем для $4k-3$-й, $4k-2$-й строчек ($k = 2, 3, \ldots, n+1$), $\frac{1}{\mu_k} Z_k(\xi)$ для 1-й и $4k-5$-й строчек, $-\frac{1}{\mu_k} T(\xi)$ для 2-й и $4k-4$-й строчек; Z_k и T_k — спектры по r нормальных и радиальных напряжений на k границе; остальные обозначения те же, что и в [1].

Решение (1) и (2) справедливо по крайней мере тогда, когда на бесконечности $U(p)$ убывает быстрее p^{-2}, а $Z_k(\xi)$ и $T_k(\xi)$ — по экспоненциальному закону; это ограничение несущественно, поскольку не затрагивает конечной части спектра.

Исследование (1), (2) можно свести к анализу однотипных матриц Δ_n и A_k, т. е., по существу, к анализу структуры граничных условий; при этом оно одинаково просто проводится для любого числа слоев. Можно показать, что подинтегральная функция в (2): 1) не имеет в плоскости ξ других особых точек, кроме корней уравнения частот и точек разветвления $\pm p/a_{n+1}$, $\pm p/b_{n+1}$ (если источники расположены в слое r, точками разветвления могут быть также $\pm p/a_r$ и $\pm p/b_r$); 2) является нечетной функцией ξ и принимает некомплексные значения при $\xi > k_{n+1}$; 3) убывает на бесконечности по экспоненциальному закону.

Этих свойств достаточно, чтобы оценить $\tilde{v}^{(j)}$ в основном аналогично тому, как это сделано в (2) для жидкого слоя на полупространстве. При больших r

$$\tilde{v}_q^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \sum_m^N \sqrt{\frac{\chi_m}{2}} \operatorname{res}_{\xi=\chi m} \left\{ \frac{g_q^{(j)}(\xi)\, e^{i(pt-\xi r)}}{\Delta_n(\xi)} \left[1 - \frac{(-3)^{j-1}}{8i\xi r} \right] \right\} + O(h_{n+1} r)^{-2}; \tag{3}$$

здесь N — число действительных корней χ_m уравнения частот, зависящее от p и z_q; при достаточно малых z_1 $N=1$ (1).

Если один из χ_m совпадает с точкой разветвления и числитель подинтегральной функции в этой точке обращается в бесконечность, то порядок убывания остаточного члена будет равен 1.

Таким образом, главная часть (1) — N интерференционных («нормальных») волн, скорость $v_m = p/\chi_m$ и интенсивность которых зависят от частоты и мощности слоев z_1; только эти волны могут переходить в свободные колебания. Исследуя структуру матриц, входящих в Δ_n, A_k, можно установить следующие свойства интерференционных волн:

1. Для скорости справедлив, а для амплитуд не справедлив закон линейного геометрического подобия.

2. Имеет место своеобразный резонанс относительно пространственного распределения источника, позволяющий регулировать частотную характеристику системы: амплитуда пропорциональна не интенсивности источника в целом, а лишь той компоненте его спектра по r, «длина волны» которой совпадает с χ_m.

3. Среда вне слоев действует как высокочастотный фильтр: с увеличением расстояния источника или точки наблюдения до границы колебания затухают тем сильнее, чем выше частота. Амплитуда вне слоев уменьшается с возрастанием z и определяется расстоянием до границы, независимо от того, где в пределах слоев расположен источник; таким образом, непосредственным источником интерференционных волн служит как бы система слоев в целом.

4. Затухание с увеличением p снижается при помещении источника в слой с низкой скоростью.

5. При возрастании pz_1 некоторые гармоники переходят в обычные граничные волны, а другие затухают. Среди асимптот дисперсионных кривых есть линии: $\chi_1 = p/R_0$; $\chi_m = p/\Gamma_{j,\,j+1}$; $\chi_m = p/b_{\min}$, где R_0 — скорость волн Релея на свободной границе; $\Gamma_{l,\,l+1}$ — скорость волн Гогеладзе (3) на l-границе; $b_{\min}$ — минимальная скорость поперечных волн в слоях. Разность ординат дисперсионной кривой и асимптоты убы-

вает с возрастанием pz_1 по экспоненциальному закону для первых двух асимптот и как $(pz_1)^{-2}$ для третьей асимптоты.

Формулы (3) и перечисленных свойств достаточно, чтобы использовать для оценки нестационарных колебаний (1) методику, разработанную Г. И. Петрашенем [3]: средняя часть спектра по t оценивается методом стационарной фазы, а высоко- и низкочастотные колебания — исходя из приближенного представления $g^{(j)}/\Delta_n$ и χ_m при малых и больших (свойство 5) pz_1.

Исследование показывает, что различные компоненты спектра нестационарных колебаний распространяются с различными скоростью и затуханием; это обусловливает изменение формы, интенсивности и поляризации смещений в процессе распространения.

Для средних частот существует интервал скоростей, двигаясь с которыми вдоль границы наблюдатель, удаляющийся от источника, будет регистрировать колебания, затухающие как $1/r$, с переменными частотой и амплитудой (разграничение средних, высоких и низких частот определяется дисперсией групповых скоростей). Этот интервал совпадает со значениями групповой скорости. Экстремумам и точкам перегиба групповой скорости соответствуют особенно интенсивные волны постоянной частоты, затухающие как $r^{-\frac{k+1}{2(k+2)}}$ (k — порядок нуля производной групповой скорости); их формирование, повидимому, связано с интерференцией групп колебаний.

Высокие частоты представлены колебаниями, скорость и затухание с глубиной которых такие же, как у обычных релеевских или граничных волн. Однако минимальная частота в процессе распространения возрастает, что обусловливает более сильное затухание, сосредоточение энергии в окрестности границы с увеличением r, а также убывание периода (кажущаяся дисперсия) по логарифмическому закону при увеличении r и t; для жидкого и свободного твердого слоев последний эффект описан в [4, 5].

Колебания на низких частотах аналогичны волнам Релея в полупространстве с константами нижней среды. С уменьшением p порядок затухания приближается сверху к r^{-1}, но амплитуда убывает.

В процессе распространения энергия передается из предыдущих фаз колебания в последующие. В связи с этим скорость, измеренная на больших базах, равна групповой, а не малых базах (или по фазовой корреляции) — фазовой скоростям стационарных волн.

Многие свойства интерференционных волн в многослойных системах представляют определенную комбинацию свойств колебаний в однородном и однослойном полупространствах [2–5], что облегчает качественную интерпретацию и расчеты.

Актуальность изучения интерференционных волн определяется тем, что:

1. Их скорость, форма, интенсивность и поляризация зависят от строения среды и, следовательно, могут быть использованы при сейсморазведке, изучении земной коры, прослеживании микросейсм и т. п.
2. Их резонанс в значительной степени определяет сейсмические свойства грунтов.
3. Вследствие большой интенсивности они составляют существенную часть сейсмических помех.

Поступило
24 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Кейлис-Борок, ДАН, **87**, № 1 (1952). [2] Д. И. Шерман, Тр. Сейсм. ин-та, № 115 (1945). [3] В. Г. Гоголадзе, Тр. Сейсм. ин-та, № 125 (1947). [4] Г. И. Петрашень, Уч. зап. ЛГУ, № 149 (1951). [5] Г. И. Петрашень, ДАН, 64, № 6 (1949).