

М. К. ФАГЕ

**ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ  
ОПЕРАТОРОВ (НА ОСНОВЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ)**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 I 1954)

Введение. В спектральной теории ограниченного линейного оператора  $A$  его резольвента  $R(\omega) = (\omega I - A)^{-1}$  ( $I$  — единичный оператор,  $\omega$  — комплексное переменное), представляемая при  $|\omega| > |A|$  ( $|A|$  — норма оператора  $A$ ) рядом

$$R(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\omega^{n+1}}, \quad (1)$$

служит для получения интегрального представления  $A$  и его итераций (степеней):

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C R(\omega) \omega^n d\omega, \quad (2)$$

где  $C$  — замкнутый контур, лежащий в области  $|\omega| > |A|$ . Если удастся найти полное аналитическое продолжение  $R(\omega)$  ряда (1) и исследовать поведение функции  $R(\omega)$  около множества  $\Delta$  ее особых точек, то контурные интегралы (2) можно иногда преобразовать к интегралам (или суммам) по множеству  $\Delta$  (= спектру оператора  $A$ ), и мы получаем спектральное представление  $A$  и его итераций. Так обстоит дело в случае самосопряженного оператора  $A$  в гильбертовом пространстве, когда  $\Delta$  есть отрезок вещественной оси. Но может оказаться, что ряд (1) есть целая функция от  $\omega^{-1}$ ,  $R(\omega)$  не имеет особых точек, кроме  $\omega = 0$ , и тогда представление (2) сводится к тривиальности:  $A^n = A^n$ ; этот случай имеет место, например, для интегрального оператора  $A = A(x, s)$  с вольтерровским ядром.

Однако резольвента  $R(\omega)$  обладает одним свойством, позволяющим обобщить ее определение так, что получаются нетривиальные представления типа (2) и в случае некоторых вольтерровских ядер. Именно, как известно, ряд (1), изображающий  $R(\omega)$  при больших значениях  $|\omega|$ , является преобразованием Бореля показательной функции оператора  $A$

$$E(z) = e^{zA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n A^n}{n!} \quad (3)$$

Функции  $E(z)$  и  $R(\omega)$  связаны при этом интегральной формулой

$$E(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{z\omega} R(\omega) d\omega, \quad (4)$$

эквивалентной (2) в силу (3). Для вольтерровских операторов это представление (4) носит тривиальный характер, так как контур  $C$  можно стянуть к точке  $\omega = 0$  вследствие регулярности  $R(\omega)$ . Но если определить точный порядок роста целой функции  $E(z)$  и сделать соответствующую замену переменного  $z$ , то можно уравнивать порядок

роста  $E$  с порядком роста  $e^{zw}$  (т. е. с 1), и тогда можно ожидать, что представление  $E$  через ее борелевское преобразование окажется нетривиальным.

Целью настоящей заметки является применение этой схемы к интегральному оператору  $A = A(x, s)$ , ядро которого есть функция влияния (функция Грина) одноточечной краевой задачи (задачи с начальными данными, задачи Коши) обыкновенного линейного дифференциального уравнения; это ядро является вольтерровским, и поэтому обычная схема с резольвентой  $(wI - A)^{-1}$  приводит к тривиальным интегральным («спектральным») представлениям.

§ 1. Порядок показательной функции. Пусть  $L(y) = y^{(k)} + p_1(x)y^{(k-1)} + \dots + p_k(x)y$  есть однородный линейный дифференциальный оператор  $k$ -го порядка с непрерывными действительными коэффициентами, заданный на конечном интервале  $0 \leq x \leq X$  или на полупрямой  $0 \leq x < X = +\infty$ . Рассмотрим одноточечную краевую задачу

$$L(y) = f(x), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(k-1)}(0) = 0 \quad (5)$$

с непрерывной действительной  $f(x)$ . Ее решение дается формулой  $y(x) = \int_0^x A(x, s)f(s)ds$ , где  $A(x, s)$  — функция влияния. Из условий, определяющих  $A(x, s)$  (см., например, <sup>(1)</sup>, гл. XI), вытекают следующие оценки:  $a \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} \leq A(x, s) \leq |A(x, s)| \leq b \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}$ , получаемые в предположении изменения  $x, s$  на произвольном, но ограниченном промежутке  $0 \leq s \leq x \leq x_1 (\leq X)$ ; при этом левая оценка верна лишь для достаточно малой разности  $x-s$ ; здесь  $a$  — достаточно малое, а  $b$  — достаточно большие положительные числа. Отсюда получаем соответствующие оценки итераций  $A_n(x, s)$  ядра  $A(x, s)$  — в тех же предположениях:

$$a^n \frac{(x-s)^{kn-1}}{(kn-1)!} \leq A_n(x, s) \leq |A_n(x, s)| \leq b^n \frac{(x-s)^{kn-1}}{(kn-1)!}.$$

Для того чтобы пользоваться аппаратом интегральных операторов, отбрасываем от показательной функции (3) ее начальный член  $I$  и определяем функцию трех переменных  $z, x, s$ , целую по  $z$ :

$$E(z; x, s) = e^{zA} - I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n A_n(x, s)}{n!}. \quad (6)$$

Из оценок для  $A_n(x, s)$  получаем, что при закрепленных  $x, s$  порядок роста  $\rho(x, s)$  функции (6) не превосходит  $\frac{1}{k+1}$ , но при достаточно малой  $x-s$  он и не меньше  $\frac{1}{k+1}$ . Таким образом, называя  $\max_{x \geq s} \rho(x, s)$  просто порядком роста функции  $E(z; x, s)$ , приходим к следующему результату:

Теорема 1. *Порядок роста показательной функции от функции влияния одноточечной краевой задачи (5) равен  $\frac{1}{k+1}$ .*

§ 2. Характеристическая функция. В соответствии со схемой, описанной во введении, заменяем в выражении (6)  $z$  на  $z^{k+1}$ , получаем целую функцию  $E(z^{k+1}; x, s)$  порядка 1 и строим ее преобразование Бореля

$$R(w; x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(k+1)n!] A_n(x, s)}{n!} \frac{1}{w^{(k+1)n+1}}. \quad (7)$$

Из оценок для  $A_n(x, s)$  находим оценки радиуса сходимости  $r(x, s)$  ряда (7):

$$\begin{aligned} r_1(x-s) &\equiv (k+1) \left[ a \left( \frac{x-s}{k} \right)^k \right]^{\frac{1}{k+1}} \leq \\ &\leq r(x, s) \leq (k+1) \left[ b \left( \frac{x-s}{k} \right)^k \right]^{\frac{1}{k+1}} \equiv r_2(x-s), \end{aligned} \quad (8)$$

и, следовательно, ряд (7) сходится, если  $|\omega| > r_2(x-s)$ , но расходится, если  $|\omega| < r_1(x-s)$  и  $x-s$  достаточно мало. Таким образом, (7) не есть целая функция от  $\omega^{-1}$ , и поэтому следующие интегральные представления, получаемые из (7), не являются тривиальными:

$$\begin{aligned} A_n(x, s) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{n}{(kn+n)!} \int_C R(\omega; x, s) \omega^{kn+n} d\omega, \\ E(z^{k+1}; x, s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C R(\omega; x, s) e^{z\omega} d\omega; \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $C$  лежит в области  $|\omega| > r(x, s)$ .

Рассмотрим теперь ту же краевую задачу, но с простейшим дифференциальным оператором  $L(y) = y^{(k)}$ . Тогда  $A(x, s) = \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}$ ,  $A_n(x, s) = \frac{(x-s)^{kn-1}}{(kn-1)!}$ , и, следовательно, характеристическая функция  $R(\omega; x, s)$  имеет при больших  $|\omega|$  следующее разложение:

$$R(\omega; x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn+n)!}{(kn-1)! n!} \frac{(x-s)^{kn-1}}{\omega^{kn+n+1}} \quad (10)$$

с радиусом сходимости  $r_0(x-s) = (k+1) \left( \frac{x-s}{k} \right)^{\frac{k}{k+1}}$ .  $R(\omega; x, s)$  оказывается алгебраической функцией от  $\omega$ ; для того чтобы это показать, найдем ее первообразную  $R_1(\omega; x, s)$  по  $\omega$ , обращаясь в  $-\frac{1}{x-s}$  при  $\omega \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} R_1(\omega; x, s) &= -\frac{1}{x-s} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn+n-1)!}{(kn-1)! n!} \frac{(x-s)^{kn}}{\omega^{kn+n}} \right\} = \\ &= -\frac{1}{x-s} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{kn+n-1}{n} \zeta^n \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\zeta = \frac{(x-s)^k}{\omega^{k+1}}. \quad (12)$$

Ряд по  $\zeta$  в фигурных скобках суммируется известным способом (см. (2), отд. III, задача 216); таким образом,

$$R_1(\omega; x, s) = \frac{1}{x-s} \frac{1}{kt-k-1}, \quad (13)$$

где  $t = t(\zeta)$  есть тот корень уравнения

$$\zeta t^{k+1} - t + 1 = 0, \quad (14)$$

который обращается в 1 при  $\zeta \rightarrow 0$  (т. е. при  $\omega \rightarrow \infty$ ).

Особые точки  $R_1(\omega; x, s)$  получаются при  $t = \frac{k+1}{k}$ ; в силу (14) и (12) это будет

$$\omega_m \equiv \omega_m(x-s) = (k+1) \left(\frac{x-s}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}} e^{\frac{2\pi i m}{k+1}} \quad (m = 0, 1, \dots, k). \quad (15)$$

Они расположены, как и должно быть, на окружности радиуса  $r_0(x-s)$  и при изменении  $x, s$  ( $0 \leq s \leq x \leq X$ ) заполняют  $k+1$  отрезков длины  $r_0(X) = u_0$ , симметрично расположенных в плоскости  $\omega$  вокруг нулевой точки. Эта «звезда» и есть «спектр»  $\Delta$  краевой задачи (5) при  $L(y) = y^{(k)}$ .

Подставим (12) в (14) и отыщем по известному правилу (см., например, (3), § 38) разложение по дробным степеням  $\omega - \omega_m$  того решения  $t = t(\omega)$  полученного уравнения, которое при  $\omega = \omega_m$  обращается в  $\frac{k+1}{k}$ ; найдем  $t = \frac{k+1}{k} + b_m(\omega - \omega_m)^{1/2} + C_m(\omega - \omega_m)^\varepsilon + \dots$  ( $1/2 < \varepsilon < \dots$ ) и подставим в (13). Приходим к следующему результату:

**Теорема 2.** *Характеристическая функция  $R(\omega; x, s)$  краевой задачи (5) для оператора  $L(y) = y^{(k)}$  при закрепленных  $x \geq s$  есть алгебраическая функция  $\omega$  с особыми точками (15), составляющими при изменении  $x, s$  звезду  $\Delta$  — «спектр» краевой задачи. Первообразная  $R_1(\omega; x, s)$  характеристической функции определяется уравнениями (13), (14), (12) и около особых точек (15) обращается в  $\infty$  как  $(\omega - \omega_m)^{-1/2}$ ; она является периодической функцией от  $\arg \omega$  с периодом  $\frac{2\pi}{k+1}$ .*

Последнее утверждение следует из разложения (11), аналитическим продолжением которого является  $R_1(\omega; x, s)$ , а также из формул (12) — (14).

§ 3. Спектральное представление. Так как  $R_1(\omega; x, s)$  однозначна по  $\omega$  при  $|\omega| > r_0(x-s)$ , то контурные интегралы (9) можно преобразовать интеграцией по частям, введя  $R_1$ , затем сделать предельный переход к звезде  $\Delta$  и при этом (вследствие периодичности  $R_1$ ) сохранить в пределе интеграцию лишь по отрезку  $0 \leq u \leq r_0(x-s)$  вещественной оси плоскости  $\omega$ :

**Теорема 3.** *Для краевой задачи (5) при  $L(y) = y^{(k)}$  существует вещественная функция  $f(u; x, s)$ , определенная и аналитическая по  $u$  на интервале  $0 \leq u < r_0(x-s)$ , обращающаяся в  $\infty$  как  $[\omega - r_0(x-s)]^{-1/2}$  на его правом конце  $r_0(x-s)$  и такая, что интегралы  $A_n(x, s) = \frac{(x-s)^{kn-1}}{(kn-1)!}$  функции влияния  $A(x, s) = \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!}$  и ее показательная функция  $E(z^{k+1}; x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-s)^{kn-1} z^{kn+n}}{(kn-1)! n!}$  (без начального члена  $\Gamma$ ) имеют интегральные представления:*

$$A_n(x, s) = \frac{n!}{(kn+n)!} \int_0^{r_0(x-s)} f(u; x, s) du^{kn+n},$$

$$E(z^{k+1}; x, s) = \int_0^{r_0(x-s)} f(u; x, s) de^{zu}. \quad (16)$$

Функцию  $f(u; x, s)$  можно назвать спектральной<sup>1</sup> функцией рассмотренной краевой задачи,  $u$  — ее спектральным параметром.

Черновицкий государственный университет

Поступило  
1 XII 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Э. П. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.  
<sup>2</sup> Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, 1, М. — Л., 1937. <sup>3</sup> Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, М. — Л., 1948. <sup>4</sup> Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, М., 1949.