Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. СМИРНОВ

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ БЛИЗОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 6 II 1954)

Размерность пространств близости* в первую очередь естественно определить так же, как определяют размерность dim топологических пространств, основанную на конечных открытых покрытиях.

Назовем δ-размерностью δd пространства близости P наименьшее из всех таких целых чисел $n \geqslant 0$, что в любое конечное δ-покрытие** δ-пространства P можно вписать конечное δ-покрытие кратности $\leqslant n+1$; если таких чисел n нет, то положим $\delta dP = \infty$.

В излагаемой теории δ-размерности основное значение имеет следующее предложение, позволяющее как предугадывать, так и доказывать многие факты этой теории, сводя их к известным предложениям обычной теории размерности:

Теорема 1. *δ-размерность δ-пространства P совпадает с размерностью его бикомпактного (абсолютно замкнутого) δ-расширения uP: $\delta dP = \dim uP$.*

Сравнительно легко получаются важные следствия:

1. *Для бикомпактных δ-пространств δ-размерность совпадает с их размерностью.*

2. *δ-размерность является инвариантом при δ-гомеоморфных отображениях.*

3. *Если $A \subseteq P$, то $\delta dA \leqslant \delta dP$.*

4. *Если A плотно в P, то $\delta dA = \delta dP$.*

5. *Для любого конечного числа любых подмножеств A_i δ-пространства P всегда $\delta d(\bigcup_i A_i) = \max \delta dA_i$.*

Из приведенных предложений видно, что δ-размерность даже для самых „хороших“ δ-пространств не совпадает с топологической их размерностью: взяв в n-мерном кубе Q^n или в гильбертовом параллелипипеде Q^∞ счетное всюду плотное множество A^n, соотв. A^∞, находим, что δ-размерность множества A^n, соотв. A^∞, равна n или, соотв., ∞, в то время как топологическая размерность каждого из них равна нулю. Видно также, что теория δ-размерности во многом от-

---

* Условимся всюду далее пространства близости ([1], [2]) кратко называть δ-пространствами.

** Покрытие γ δ-пространства P называется δ-покрытием, если для любых двух близких множеств A и B существует элемент $\Gamma \in \gamma$, пересекающийся как с A, так и с B. Конечное покрытие $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ является δ-покрытием тогда и только тогда, когда можно подобрать такие множества $A_i \Subset \Gamma_i$ (это значит, что A_i не близко к $P \setminus \Gamma_i$), $i \leqslant k$, что $\bigcup_{i \leqslant k} A_i = P$ (([2]), стр. 568).

лична от теории размерности, так что аналогия, которая между ними имеет место, не является поверхностной. Одним из таких серьезных отличий является то, что известная в теории размерности теорема суммы для счетного числа слагаемых замкнутых множеств, как показывает вышеприведенный пример, будучи сформулированной для δ-размерности, становится неверной, в то время как для конечного числа слагаемых она верна и без предположения замкнутости. Наоборот, теория существенных отображений П. С. Александрова (см. ([3]), п. 4) при надлежащем видоизменении определений в основном остается верной и для δ-размерности.

δ-отображение* f δ-пространства P в бикомпакт** Φ назовем α-отображением, где α — какое-нибудь δ-покрытие δ-пространства P, если для каждого $x \in \Phi$ можно найти такую окрестность Ox, полный прообраз которой при отображении f содержится в некотором элементе покрытия α. Так как всякое непрерывное отображение одного бикомпакта в другой является δ-отображением, а всякое открытое конечное покрытие того или иного бикомпакта является его δ-покрытием, то в случае бикомпактности пространства P новое определение α-отображения совпадает со старым топологическим его определением. Назовем далее отображение f пространства X в пространство Y плотным, если образ пространства X при этом отображении является плотным в Y множеством.

Теорема 2. *δ-размерность δ-пространства P есть наименьшее из всех таких целых чисел $n \geqslant 0$, что для любого δ-покрытия α пространства P существует (плотное) α-отображение пространства P в некоторый n-мерный полиэдр (бикомпакт); если же таких целых чисел n нет, то $\delta dP = \infty$.*

Заметим, что, вообще говоря, устроить отображение δ-пространства δ-размерности n на n-мерный полиэдр нельзя, как показывает пример любого счетного δ-пространства положительной δ-размерности.

Теорема 3. *δ-размерность δ-пространства P есть наименьшее из всех целых чисел $n \geqslant 0$, для каждого из которых всякое δ-отображение любого (замкнутого) множества $A \subseteq P$ в n-мерную сферу можно продолжить в δ-отображение на все P.*

Наконец, назовем δ-отображение f δ-пространства P в замкнутый шар Q^n существенным, если не существует никакого δ-отображения g пространства P в границу S^{n-1} шара Q^n, совпадающего с отображением f на множестве $f^{-1}(S^{n-1})$.

Теорема 4. *δ-размерность δ-пространства P есть наибольшее из всех целых чисел $n \geqslant 0$, для каждого из которых имеется существенное отображение в n-мерный замкнутый шар.*

Первым шагом в изучении δ-размерности множеств, лежащих в евклидовых пространствах, явилась следующая

Теорема 5. *Для того чтобы множество A n-мерного евклидова пространства E^n имело δ-размерность n, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое положительное число r, что для всякого положительного числа ε можно было найти шар радиуса r, в котором множество A составляет ε-сеть.*

Вот два следствия этой теоремы:

1. *Всякое множество, где-либо плотное в E^n, в частности, всякое открытое в E^n множество, имеет δ-размерность n.*

---

* Отображение одного δ-пространства в другое называется δ-отображением, если оно близкие множества переводит в близкие (([2]), стр. 543).

** Всякий бикомпакт можно превратить в δ-пространство всего лишь одним способом: надо назвать близкими лишь те множества, замыкания которых пересекаются.

2. *Ограниченное множество пространства E^n тогда и только тогда имеет δ-размерность n, когда оно где-либо плотно в E^n.*

Для неограниченных, хотя бы даже замкнутых множеств, последнее утверждение уже неверно, как показывает следующий пример: возьмем в E^n последовательность $Q_1^n, Q_2^n, \ldots, Q_j^n, \ldots$ непересекающихся попарно шаров Q_j^n радиуса 1. Для каждого j в шаре Q_j^n возьмем какую-нибудь ε-сеть S_j, состоящую из $k_j \geqslant j$ точек. Тогда множество $S^n = \bigcup_j S_j$ будет замкнутым счетным нигде не плотным множеством δ-размерности n. Из этого примера видно, что δ-размерность того или иного множества зависит от того, как оно сгущается при удалении в бесконечность. Для исследования этого обстоятельства назовем δ-окаймлением δ-пространства P всякую такую конечную систему γ его множеств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, к которой можно так подобрать множества $A_1 \Subset \Gamma_1, \ldots, A_k \Subset \Gamma_k$, что замыкание (в P) дополнения $P \diagdown \bigcup_{i \leqslant k} A_i$ бикомпактно. Назовем краевой δ-размерностью δd^∞ пространства P наименьшее из таких целых чисел $n \geqslant -1$, что во всякое δ-окаймление δ-пространства P можно вписать δ-окаймление кратности $\leqslant n+1$; если же таких чисел n нет, то положим $\delta d^\infty P = \infty$. Оказывается, верна

Теорема 6. *Краевая δ-размерность δ-пространства P равна δ-размерности края $uP \diagdown P$ этого пространства*: $\delta d^\infty P = \delta d\,(uP \diagdown P)$.

Назовем теперь, следуя П. С. Александрову, относительной размерностью* rd вполне регулярного пространства R наибольшее из всех таких целых чисел $n \geqslant 0$, для каждого из которых в R имеется бикомпакт размерности n; если же наибольшего среди таких чисел n нет, то положим $rdR = \infty$.

Теорема 7. *Для любого δ-пространства P имеем*

$$\delta dP = \max\{\delta d^\infty P,\, rdP\}.$$

Изложенные результаты позволяют ввести надлежащее определение размерности для вполне регулярных, но не нормальных пространств, совпадающее с обычным определением в случае нормальных пространств**

Скажем, что множество A вполне регулярного пространства R функционально вложено во множество B того же пространства, если множества A и $R \diagdown B$ функционально отделимы. Назовем теперь конечное покрытие $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ этого пространства нормальным***, если в каждое $\Gamma_i \in \gamma$ можно так функционально вложить множество A_i, что $\bigcup_{i \leqslant k} A_i = R$.

Наконец, размерностью $\dim$ вполне регулярного пространства R назовем наименьшее из всех таких целых чисел $n \geqslant 0$, что в любое нормальное покрытие этого пространства можно вписать нормальное покрытие кратности $\leqslant n+1$. Легко видеть, что для нормальных пространств так определенная размерность совпадает с обычной и что $\dim R = \dim \beta R$.

---

* Относительно $\beta R \supseteq R$; см. (3), стр. 26.

** Обычное понятие размерности $\dim$, приложенное к таким пространствам, страдает многими недостатками, одним из которых является хотя бы тот факт, что размерность βR может не совпадать с размерностью самого R.

*** Понятие нормального покрытия введено еще в (4), стр. 153. Там же (см. теорему 1) доказано, что всякое открытое нормальное покрытие можно продолжить в открытое покрытие на максимальное бикомпактное расширение βR.

Заметим, что нормальные покрытия вполне регулярного пространства R суть не что иное как δ-покрытия максимального* δ-пространства $P = R_\beta$ (совместимого с R), в котором считаются близкими лишь функционально неотделимые множества, а непрерывные отображения вполне регулярного пространства X во вполне регулярное пространство Y суть δ-отображения δ-пространства X_β в δ-пространство Y_β.

Тем не менее теория размерности вполне регулярных пространств не совпадает целиком с теорией δ-размерности максимальных δ-пространств, хотя бы потому, что множество A, лежащее в максимальном δ-пространстве R_β, взятое с тою близостью, которую на нем порождает R_β, может и не быть максимальным δ-пространством. Это всегда так лишь в том случае, когда A является замкнутым множеством. Поэтому все теоремы, доказанные для δ-размерности, оказываются справедливыми и для определенной здесь размерности dim вполне регулярных пространств, если только в их формулировках вместо δ-покрытий брать нормальные (открытые) покрытия, вместо тех или иных подмножеств брать лишь замкнутые подмножества, вместо δ-отображений брать непрерывные отображения, а под плотными отображениями понимать отображения „на" и т. п. Заметим, наконец, что многие предложения теории размерности нормальных пространств, не укладывающиеся в теорию δ-размерности, легко переносятся и на этот более общий случай. Так, например, дело обстоит с известной теоремой суммы: *если вполне регулярное пространство R представлено в виде суммы счетного или конечного числа замкнутых множеств A_i, то* $\dim R = \sup \{\dim A_i\}$.

Поступило
25 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Ефремович, ДАН, **76**, № 3, 341 (1951). [2] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **31** (73) : 3, 543 (1952). [3] П. С. Александров, Proc. Roy. Soc., A, **189**, 11 (1947). [4] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **31** (73) : 1, 152 (1952).

* Максимальное δ-пространство $P = R_\beta$ вполне регулярного пространства R порождается его максимальным бикомпактным расширением $\beta R = uP$.