Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 4

МАТЕМАТИКА

И. И. ОГИЕВЕЦКИЙ

О СУММИРОВАНИИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 II 1954)

В настоящей заметке устанавливаются некоторые теоремы о суммировании двойных рядов. Используемые ниже определения чезаровской и абелевской суммарности двойных рядов и медленного колебания двойной последовательности известны (см., например, ([1], [4])).

Теорема 1. *Если последовательность s_{mn} суммируется методом $(C, \alpha+\eta, \beta+\delta)$, $(\alpha, \beta) > -1$, $(\eta, \delta) > 0$, к s и последовательность $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ ограничена, то последовательность $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ суммируется методом (C, η, δ), $(\eta, \delta) > 0$, к s.*

Теорема 2. *Если последовательность $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$, $(\alpha, \beta) > -1$, ограничена и суммируется методом (C, η, δ), $(\eta, \delta) > 0$, к s, то последовательность s_{mn} суммируется методом $(C, \alpha+\eta, \beta+\delta)$ к s.*

Установленные в теоремах 1 и 2 соотношения аналогичны известному предложению, что соотношения $C_n^{(\alpha)}(C^{(\beta)}(A)) \to A$, $C_n^{(\alpha+\beta)}(A) \to A$ равносильны ([2]).

Теорема 3. *Если последовательность $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$, $(\alpha, \beta) > -1$, ограничена, то последовательность $\sigma_{m,n}^{\alpha+\eta,\beta+\delta}$, $(\eta, \delta) > 0$, медленно колеблется.*

Теорема 4. *Если двойной ряд Σa_{kl} суммируется методом Абеля к s и последовательность его чезаровских средних $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$, $(\alpha, \beta) > -1$, ограничена и медленно колеблется, то Σa_{kl} суммируется методом (C, α, β) к s.*

Для случая $\alpha = \beta = 0$ эта теорема содержится в ([1]).

Из теорем 3 и 4 вытекает

Теорема 5. *Если двойной ряд Σa_{kl} ограничен (C, α, β), $(\alpha, \beta) > -1$, и суммируется методом Абеля к s, то он суммируется $(C, \alpha+\eta, \beta+\delta)$, $(\eta, \delta) > 0$, к тому же значению.*

Последнее предложение обобщает теорему Андерсена ([3]) на двойные ряды; примененная здесь схема доказательства приложима и в случае простых рядов и дает новый вариант ее вывода.

Нетрудно видеть, что из теоремы 5 вытекает следующее следствие.

Следствие. *Для двойных рядов, ограниченных (C, α, β), $(\alpha, \beta) > -1$, методы суммирования (C, α', β'), $(\alpha', \beta') > (\alpha, \beta)$, и Абеля эквивалентны.*

Теорема 5 и ее следствие обобщают следующие результаты:

1. *Для двойных рядов с ограниченными частными суммами методы суммирования $(C, 1, 1)$ и Абеля эквивалентны* (см. ([1]), теорема 7).

2. *Пусть $(\alpha, \beta) > -1$, $(\alpha', \beta') > (\alpha, \beta)$. Если двойной ряд ограничен (C, α, β) и суммируем (C, α', β'), то он суммируем $(C, \alpha+\eta, \beta+\delta)$, $(\eta, \delta) > 0$, к тому же значению* (см. ([4]), теорема 4).

Лемма 1. *Если последовательность* $\sigma_{m,n}^{\alpha+1,\beta+1}$, $(\alpha,\beta)>-1$, *ограничена,* $\lim\limits_{(m,n)\to\infty}\sigma_{m,n}^{\alpha+1,\beta+1}=s$, *то последовательность* $\sigma_{\alpha,\beta}^{\alpha,\beta}$ *суммируется методом среднеарифметических к* s.

Так как

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}=\frac{\Delta_{11}\{A_{m-1}^{\alpha+1}A_{n-1}^{\beta+1}\sigma_{m-1,n-1}^{\alpha+1,\beta+1}\}}{A_m^\alpha A_n^\beta},$$

где $\Delta_{11}f_{m,n}=f_{m,n}-f_{m+1,n}-f_{m,n+1}+f_{m+1,n+1}$, то

$$\frac{1}{MN}\sum_{m=1,\,n=1}^{M,\,N}\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}=\frac{\alpha\beta}{MN}\sum_{m=1,\,n=1}^{M-1,\,N-1}\frac{1}{(m+1)(n+1)}\frac{A_m^{\alpha+1}}{A_{m+1}^\alpha}\frac{A_n^{\beta+1}}{A_{n+1}^\beta}\sigma_{m,n}^{\alpha+1,\beta+1}+$$

$$+\frac{\alpha}{MN}\frac{A_N^{\beta+1}}{A_N^\beta}\sum_{m=1}^{M-1}\frac{1}{(m+1)}\frac{A_m^{\alpha+1}}{A_{m+1}^\alpha}\sigma_{m,N}^{\alpha+1,\beta+1}+\frac{\beta}{MN}\frac{A_M^{\alpha+1}}{A_M^\alpha}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+1)}\frac{A_n^{\beta+1}}{A_{n+1}^\beta}\sigma_{M,n}^{\alpha+1,\beta+1}+$$

$$+\frac{1}{MN}\frac{A_M^{\alpha+1}}{A_M^\alpha}\frac{A_N^{\beta+1}}{A_N^\beta}\sigma_{M,N}^{\alpha+1,\beta+1}+o(1).$$

Из леммы 1 (из ([1]), стр. 575), ограниченности $\sigma_{m,n}^{\alpha+1,\beta+1}$ и $A_\beta^\alpha\cong\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$:

$$\lim_{(MN)\to\infty}\frac{1}{MN}\sum_{m=1,\,n=1}^{M,\,N}\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}=s.$$

Следствие. *Если последовательность* $\sigma_{m,n}^{\alpha+1,\beta+1}$ *ограничена,* $\lim\limits_{(m,n)\to\infty}\sigma_{m,n}^{\alpha+1,\beta+1}=s$ *и последовательность* $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ *медленно колеблется, то* $\lim\limits_{(m,n)\to\infty}\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}=s$.

Действительно, из условий следствия вытекает (см. лемму 1) сходимость среднеарифметического последовательности $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ к s. Из сходимости же $(C,1,1)$-среднего последовательности $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ и ее медленного колебания следует (см. ([1]), стр. 586), что $\lim\limits_{(m,n)\to\infty}\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}=s$.

Доказательство теоремы 1. Из условий теоремы вытекает (см. ([4])), что $\lim\limits_{(m,n)\to\infty}\sigma_{m,n}^{\alpha+1,\beta+1}=s$, отсюда же, вследствие леммы 1, следует, что $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ суммируется методом среднеарифметических к s.

Еще раз применяя теорему из ([4]), получим, что последовательность $\sigma_{\alpha,\beta}^{\alpha,\beta}$ суммируется методом (C,n,δ) к s.

Доказательство теоремы 2. Примем $n=\delta=1$. Положим $t_{kl}=\frac{1}{(k+1)(l+1)}\sum\limits_{m=0,\,n=0}^{k,\,l}\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$. Тогда

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}=\Delta_{11}\{mnt_{m-1,\,n-1}\},$$

$$\sigma_{m,n}^{\alpha+1,\beta+1}=\frac{1}{A_M^{\alpha+1}A_N^{\beta+1}}\sum_{m=0,\,n=0}^{M,\,N}A_m^\alpha A_n^\beta\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}=$$

$$=\frac{\alpha\beta}{A_M^{\alpha+1}A_N^{\beta+1}}\sum_{m=0,\,n=0}^{M-1,\,N-1}A_m^\alpha A_n^\beta t_{mn}-\frac{\alpha(N+1)A_N^\beta}{A_M^{\alpha+1}A_N^{\beta+1}}\sum_{m=0}^{M-1}A_m^\alpha t_{mN}-$$

$$-\frac{\beta(M+1)A_M^\alpha}{A_M^{\alpha+1}A_N^{\beta+1}}\sum_{n=0}^{N-1}A_n^\beta t_{Mn}+\frac{A_M^\alpha A_N^\beta}{A_M^{\alpha+1}A_N^{\beta+1}}t_{MN}(M+1)(N+1).$$

Из леммы 1 (из ([1]), стр. 575), ограниченности t_{mn} и $A_n^\alpha \simeq \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ следует $\lim\limits_{(M,N)\to\infty} \sigma_{M,N}^{\alpha+1,\beta+1} = s$.

Рассмотрим общий случай. Из ограниченности и суммируемости последовательности $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ методом (C, η, δ) вытекает ([4]) суммируемость последовательности $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta}$ методом $(C, 1, 1)$, а следовательно, и суммируемость последовательности s_{mn} методом $(C, \alpha+1, \beta+1)$. Так как последовательность s_{mn} суммируется методом $(C, \alpha+1, \beta+1)$ к s и имеет ограниченные (C, α, β)-средние, то, еще раз применяя теорему из ([4]), получим, что последовательность s_{mn} суммируется методом $(C, \alpha+\eta, \beta+\delta)$ к s.

Доказательство теоремы 3. Очевидно, можно принять, что $0<\eta<1$, $0<\delta<1$. Так как

$$\sigma_{m,n}^{\alpha+\eta,\beta+\delta} = (A_m^{\alpha+\eta} A_n^{\beta+\delta})^{-1} \sum_{k=0,\, l=0}^{m,\, n} A_{m-k}^{\eta-1} A_{n-l}^{\delta-1} A_k^\alpha A_l^\beta \sigma_{kl}^{\alpha\beta},$$

то

$$\sigma_{m+p,\, n+q}^{\alpha+\eta,\, \beta+\delta} - \sigma_{m,\, n}^{\alpha+\eta,\, \beta+\delta} =$$

$$= \sum_{k=0,\, l=0}^{m,\, n} \frac{A_{m+p-k}^{\eta-1} A_{n+q-l}^{\delta-1}}{A_{m+p}^{\alpha+\eta} A_{n+q}^{\beta+\delta}} \left(1 - \frac{A_{m+p}^{\alpha+\eta}}{A_m^{\alpha+\eta}} \frac{A_{n+q}^{\beta+\delta}}{A_n^{\beta+\delta}} \frac{A_{m-k}^{\eta-1}}{A_{m+p-k}^{\eta-1}} \frac{A_{n-l}^{\delta-1}}{A_{n+q-l}^{\delta-1}}\right) A_k^\alpha A_l^\alpha \sigma_{k,\, l}^{\alpha,\, \beta} +$$

$$+ \frac{1}{A_{m+p}^{\alpha+\eta}} \frac{1}{A_{n+q}^{\beta+\delta}} \left(\sum_{k=m+1,\, l=0}^{m+p,\, n} + \sum_{k=0,\, l=n+1}^{m,\, n+q} + \sum_{k=m+1,\, l=n+1}^{m+p,\, n+q} \right) A_{m+p-k}^{\eta-1} A_{n+q-l}^{\delta-1} A_k^\alpha A_l^\beta \sigma_{k,\, l}^{\alpha,\, \beta}. \tag{1}$$

Покажем, что для $p = [m\delta_1]$, $q = [n\delta_2]$, $(m, n) \to \infty$, $(\delta_1, \delta_2) \to 0$ модуль каждого из слагаемых стремится к нулю. Для первого слагаемого из (1) имеем

$$\left| \sum_{k=0,\, l=0}^{m,\, n} \{\cdots\} \right| \leqslant \left| \sum_{k=1,\, l=0}^{[m+\theta],\, [n+\theta]} \{\cdots\} \right| + \left| \sum_{k=0,\, l=[n\theta]+1}^{[m\theta],\, n} \{\cdots\} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=[m\theta]+1,\, l=0}^{m,\, [n\theta]} \{\cdots\} \right| + \left| \sum_{k=[m\theta]+1,\, l=[n\theta]+1}^{m,\, n} \{\cdots\} \right|, \tag{2}$$

где $0<\theta<1$.

Так как $0<\eta<1$, $0<\delta<1$, то отношения $A_{m-k}^{\eta-1} / A_{m+p-k}^{\eta-1}$, $A_{n-l}^{\delta-1} / A_{n+q-l}^{\delta-1}$ возрастают с ростом k и l.

Поэтому

$$\underset{\substack{0\leqslant k \leqslant [m\theta] \\ 0 \leqslant l \leqslant [n\theta]}}{|\delta_{kl}|} = \left| 1 - \frac{A_{m+p}^{\alpha+\eta}}{A_m^{\alpha+\eta}} \frac{A_{n+q}^{\beta+\delta}}{A_n^{\beta+\delta}} \frac{A_{m-k}^{\eta-1}}{A_{m+p-k}^{\eta-1}} \frac{A_{n-l}^{\delta-1}}{A_{n+q-l}^{\delta-l}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max \left\{ \left| 1 - \frac{A_{m+p}^{\alpha+\eta}}{A_m^{\alpha+\eta}} \frac{A_{n+q}^{\beta+\delta}}{A_n^{\beta+\delta}} \frac{A_m^{\eta-1}}{A_{m+p}^{\eta-1}} \frac{A_n^{\delta-1}}{A_{n+q}^{\delta-1}} \right|, \left| 1 - \frac{A_{m+p}^{\alpha+\eta}}{A_m^{\alpha+\eta}} \frac{A_{n+q}^{\beta+\delta}}{A_n^{\beta+\delta}} \frac{A_{m-[m\theta]}^{\eta-1}}{A_{m+p-[m\theta]}^{\eta-1}} \frac{A_{n-[n\theta]}^{\delta-1}}{A_{n+q-[n\theta]}^{\delta-1}} \right| \right\}. \tag{3}$$

Из (3) получим, что $|\delta_{kl}| \to 0$ при $(m, n) \to \infty$, $(\delta_1, \delta_2) \to 0$, откуда и следует, что первое слагаемое в (2) стремится к нулю при $(m, n) \to \infty$, $(\delta_1, \delta_2) \to 0$.

Для второго слагаемого в (2), используя свойства чезаровских чисел и их асимптотическое представление, получим

$$\left| \sum_{k=0,\, l=[n\theta]+1}^{[m\theta],\, n} \{\cdots\} \right| \leqslant C(1-\theta)^{\delta}$$

для $(m, n) \to \infty$, $(\delta_1, \delta_2) \to 0$ и аналогичное выражение для третьего и четвертого слагаемых. Поэтому при θ, достаточно близком к единице, сумма трех последних слагаемых будет произвольно мала ([5]). Рассуждая аналогично, нетрудно убедиться, что при $(m, n) \to \infty$, $(\delta_1, \delta_2) \to 0$ второе, третье и четвертое слагаемые в (1) стремятся к нулю.

Теорема доказывалась для $(\alpha, \beta) > 0$. Для других сочетаний знаков α и β рассуждения проводятся аналогично.

Для доказательства теоремы 4 нам необходимы следующие леммы.

Лемма 2. *Если для функции $f(x,y)$, интегрируемой в $0 \leqslant (x,y) < 1$ $(1-x)^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1} f(x, y)$, $(\alpha, \beta) > 0$, ограничено для $0 \leqslant (x, y) < 1$ и $\lim\limits_{(x, y) \to 1} (1-x)^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1} f(x, y) = s$, то*

$$\lim_{(x, y) \to 1} (1-x)(1-y) \int_0^x \int_0^y (x-u)^{\alpha-1}(y-v)^{\beta-1} f(u, v)\, du\, dv = \frac{s}{\alpha\beta}.$$

Одномерный случай см. в ([6]). Двумерный случай рассматривается аналогично.

Лемма 3. *Если последовательность s_{mn} ограничена, медленно колеблется и суммируется методом Абеля к s, то*

$$\lim_{(m, n) \to \infty} s_{mn} = s.$$

Вытекает из ([1]) (см. стр. 580 и 586).

Доказательство теоремы 4. Из суммируемости ряда Σa_{kl} методом Абеля к s вытекает, что

$$\lim_{(x, y) \to 1} (1-x)^{(\alpha+1)+1}(1-y)^{(\beta+1)+1} \sum_{k=0,\, l=0}^{\infty} \sigma_{k,\, l}^{\alpha+1,\, \beta+1} A_k^{\alpha+1} A_l^{\beta+1} x^k y^l = s;$$

применяя лемму 2, получим, что

$$\lim_{(x, y) \to 1} (1-x)(1-y) \sum_{k=0,\, l=0}^{\infty} \sigma_{k,\, l}^{\alpha+1,\, \beta+1} x^k y^l = s.$$

Из этого, ограниченности и медленного колебания последовательности $\sigma_{k,\, l}^{\alpha+1,\, \beta+1}$ (вследствие теоремы 3) получим, используя лемму 3, что

$$\lim_{(k, l) \to \infty} \sigma_{k,\, l}^{\alpha+1,\, \beta+1} = s.$$

Вследствие медленного колебания и ограниченности последовательности $\sigma_{k,\, l}^{\alpha,\, \beta}$ отсюда (см. следствие леммы 1) получим, что $\lim\limits_{(k, l) \to \infty} \sigma_{k,\, l}^{\alpha,\, \beta} = s$.

Теорема 4 вначале была доказана для целых α и β. С. Б. Стечкин заметил, что теорему можно доказать для произвольных $(\alpha,\beta) > -1$, если, сохраняя общую схему первоначального доказательства, показать справедливость следствия леммы 1. Пользуюсь случаем выразить благодарность С. Б. Стечкину.

Днепропетровский государственный университет

Поступило 16 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Кнопп, Math. Zs., **45**, 573 (1939). [2] Г. Харди, Расходящиеся ряды, 1951. [3] A. Andersen, Studier over Cesaro's Summabilitats Methode, Copenhagen, 1921. [4] М. Ф. Тиман, ДАН, **76**, № 5 (1951). [5] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939, стр. 261. [6] Е. Титчмарш, Теория функций, 1951, стр. 275.