Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 4

МАТЕМАТИКА

Л. Я. НЕЙШУЛЕР

УРАВНЕНИЯ С ЧЕТЫРЬМЯ РАЗЪЕДИНЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ОПТИМАЛЬНОЕ ДВУХЧЛЕННОЕ ТАБУЛИРОВАНИЕ ИХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 II 1954)

Гурса (1) дал необходимое и достаточное условие разъединимости переменных в уравнении с четырьмя переменными

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{1}$$

т. е. условие того, что уравнение (1) равносильно некоторому уравнению вида $f_1(x_i, x_j) = f_2(x_p, x_q)$, в виде равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial x_q}\frac{D(f, \partial f / \partial x_p)}{D(x_i, x_j)} - \frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{D(f, \partial f / \partial x_q)}{D(x_i, x_j)} = 0; \tag{A}$$

здесь как и в дальнейшем i, j, p, q — какая-нибудь перестановка индексов 1, 2, 3, 4.

Однако это условие не дает указания, как в случае его удовлетворения осуществить возможное разъединение переменных. Покажем, что необходимое и достаточное условие можно записать в более простом виде и укажем основанный на этом условии способ разъединения переменных в уравнении (1).

Для разъединения переменных в уравнении с четырьмя переменными (1) необходимо и достаточно, чтобы для систем (x_1, x_2, x_3, x_4), для которых выполняется (1), имело место

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \frac{\partial f}{\partial x_j} = A(x_i, x_j), \tag{Б}$$

где $A(x_i, x_j)$ — функция лишь двух аргументов x_i и x_j.

Перепишем уравнение (1) в форме

$$\varphi(x_i, x_j, x_p, z) = 0, \tag{2}$$

т. е. обозначим x_q через z, и, соответственно, равносильное ему уравнение $\alpha(x_i, x_j) = \beta(x_p, x_q)$ в форме

$$\psi(x_i, x_j) = \gamma(x_p, z) \tag{3}$$

и будем в (2) и (3) рассматривать z как функцию трех переменных x_i, x_j, x_p.

Решив (3) относительно z, будем иметь

$$z(x_i, x_j, x_p) = \eta[\psi(x_i, x_j) x_p]. \tag{4}$$

Из (4) имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} - \alpha_1 \frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \tag{5}$$

где $\alpha_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} : \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$.

Продифференцировав (2) по x_i и x_j, имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_i}=0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_j}=0. \tag{7}$$

Вычтя произведения (7) на α_1 (α_1 то же, что и в (5)) из (6), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}-\alpha_1\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)=0. \tag{8}$$

Из (5) и (8) следует

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0,\quad \text{или}\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}:\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=\frac{\partial\psi}{\partial x_i}:\frac{\partial\psi}{\partial x_j}.$$

Возвращаясь к первоначальному обозначению, получим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}:\frac{\partial f}{\partial x_j}=\alpha_1,$$

где α_1—некоторая функция двух переменных x_i и x_j, откуда получаем условие (Б).

Покажем, что условие (Б) эквивалентно условию (А).

Дифференцируя (6) и (7) по x_p, получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_p}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_p}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x_p}\,\frac{\partial z}{\partial x_i}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\,\frac{\partial z}{\partial x_p}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_p}=0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_p}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_p}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x_p}\,\frac{\partial z}{\partial x_j}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x_j}\,\frac{\partial z}{\partial x_p}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\partial x_p}=0.$$

Умножим первое равенство на $\partial z/\partial x_j$, а второе на $\partial z/\partial x_i$. Так как третьи и четвертые члены (слева направо) полученных таким образом равенств окажутся равными, то, вычитая из первого второе, получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_p}\,\frac{\partial z}{\partial x_j}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_j}\,\frac{\partial z}{\partial x_p}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_p}\,\frac{\partial z}{\partial x_i}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_p}\,\frac{\partial z}{\partial x_p}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_p}\,\frac{\partial z}{\partial x_j}-\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\partial x_p}\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)=0.$$

Заменив в полученном (кроме последней скобки) $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ через $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}:\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ из (6) и $\frac{\partial z}{\partial x_j}$ через $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}:\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ из (7) и возвращаясь после соответствующих преобразований к обозначениям, принятым для уравнения (1), можем написать

$$\frac{\partial f}{\partial x_q}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_p}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_p}\right)-\frac{\partial f}{\partial x_p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_q}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_q}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_q}\right)^3\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_p}-\frac{\partial z}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\partial x_p}\right)=0. \tag{9}$$

Но выражение, образованное первыми двумя членами полученного равенства (9), и есть левая часть (А).

Таким образом, если условие Гурса выполняется, то имеет место и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_p}-\frac{\partial z}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\partial x_p}\right)=0,$$

или, так как,

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0,$$

то и

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_p} - \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_p} = 0,$$

или, что то же,

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i} : \frac{\partial z}{\partial x_j}\right) = 0,$$

откуда имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} - \alpha\frac{\partial z}{\partial x_j} = 0,$$

где α — некоторая функция двух переменных x_i и x_j, а отсюда и из (6) и (7) и следует условие (Б).

Из выражения (9) получается и обратный переход от условия (Б) к условию (А). Действительно, из (8) следует, что если $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \frac{\partial f}{\partial x_j}$ зависит только от x_i и x_j, то и $\frac{\partial z}{\partial x_i} : \frac{\partial z}{\partial x_j}$ также зависит только от x_i и x_j.

Следовательно, $\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i} : \frac{\partial z}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_p} - \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_p} = 0,$
а отсюда и из (9) следует (А).

Перейдем теперь к способу разъединения переменных в уравнении (1). Если условие (Б) выполняется, то, в силу эквивалентности условий (Б) и (А), существует уравнение

$$\eta_1(x_i,\ x_j) = \eta_2(x_p,\ x_q),$$

равносильное уравнению (1). Аналогично тому как мы получили необходимость условия (Б), мы можем получить необходимость и условия

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} : \frac{\partial f}{\partial x_q} = B(x_p,\ x_q). \tag{Б$_1$}$$

Пользуясь же (Б) и (Б$_1$), можно для функции $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ построить представление

$$F[\varphi_1(x_i,\ x_j),\quad \varphi_2(x_p,\ x_q)], \tag{10}$$

приняв за $\varphi_1(x_i,\ x_j)$ какой-нибудь интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$A(x_i,\ x_j)\,dx_i + dx_j = 0,$$

а за $\varphi_2(x_p,\ x_q)$ — какой-нибудь интеграл уравнения

$$B(x_p,\ x_q)\,dx_p + dx_q = 0.$$

Если же функция $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ допускает представление (10), то, заменив уравнение (1) равносильным ему уравнением вида

$$F[\varphi_1(x_i,\ x_j), \varphi_2(x_p,\ x_q)] = 0 \tag{11}$$

и решая (11) относительно $\varphi_1(x_i, x_j)$, мы и получим требуемое разъединение в виде $\varphi_1(x_i,\ x_j) = \psi_1(x_p,\ x_q)$.

Легко убедиться, что условия (Б) и (Б$_1$) необходимы и достаточны для существования у функций четырех переменных $u = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ трехчленного представления $f_3[f_1(x_i, x_j), f_2(x_p,\ x_q)]$.

Следовательно, условию двухчленного [2] разъединения переменных в уравнении с четырьмя переменными (1) можно еще дать и такую формулировку:

Для того чтобы уравнение (1) допускало двухчленное разъединение переменных, достаточно и необходимо существование у функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ трехчленного представления.

Таким образом, вопрос о двухчленном разъединении переменных в уравнении (1) сводится к вопросу о существовании у функции четырех переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, стоящей в левой части уравнения (1), трехчленного представления.

Выполнение условия (Б), как было указано выше, позволяет осуществить в уравнении (1) разъединение переменных, т. е. заменить его равносильным ему уравнением

$$x_q = \psi_2[\psi_1(x_i, x_j), x_p]. \tag{12}$$

В работе [4] мы указали на две (одну двухмерную и одну трехмерную) двухчленные табличные конструкции для функций трех переменных, допускающих двухчленное представление, которые обладают свойством обратимости и, следовательно, позволяют решать соответствующие уравнения с четырьмя переменными относительно любого из переменных.

Теорема об однозначности $n-1$-членных представлений функций n переменных [5] вместе с изложенным, очевидно, позволяет строго решать задачу об оптимальном двухчленном табулировании уравнений с четырьмя переменными. Изложенное, очевидно, может быть использовано при построении составных номограмм.

Поступило
23 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Goursat, Bull. Soc. math. de France, **27** (1899). [2] Л. Я. Нейшулер, ДАН, **82**, № 2 (1952). [3] Л. Я. Нейшулер, Изв. АН СССР, ОТН, в. 8 (1948). [4] Л. Я. Нейшулер, там же, в. 11, 1191 (1947). [5] Л. Я. Нейшулер, Усп. матем. наук, **3**, в. 3 (1948).