Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 4

МАТЕМАТИКА

С. И. МЕЛЬНИК

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 II 1954)

В предлагаемой работе нами вводится определение осциллирующих функций и дается приложение осциллирующих функций к приближенному решению линейных интегральных уравнений, причем при небольшом числе операций получается хорошее приближение к решению.

Определения. а) Функцию $f(p)$, определенную и суммируемую вместе со своим квадратом в области ω, назовем осциллирующей функцией, если для некоторой разбивки области ω на неперекрывающиеся части ω_i $(i=1,2,\ldots,n)$ будем иметь $\int\limits_{\omega_i} f(p)\,d\omega_p=0$ для $i=1,2,\ldots,n$. Осциллирующую функцию $f(p)$ будем характеризовать параметрами d и M, где d — наибольший из диаметров областей ω_i $(i=1,2,\ldots,n)$, а $M=\sqrt{\frac{1}{\operatorname{mes}\omega}\int\limits_{\omega} f^2(p)\,d\omega_p}$. Если дана осциллирующая функция с параметрами d и M, то это будем записывать так: $f(p)\in O(d,M)$.

б) Функцию $f(p)$ будем называть суммой осциллирующих функций, если $f(p)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(p)$, где для всех индексов k имеем $f_k(p)\in O(d_k,M_k)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k M_k$ сходится. Сумму осциллирующих функций будем характеризовать параметром M, где $M=\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k M_k \leqslant \sqrt{\sum d_k^2\cdot\sum M_k^2}$, и будем сокращенно записывать так: $f(p)\in\Sigma\, o(M)$.

в) Нам, наряду с интегральным уравнением (1) с непрерывным ядром $k(p,q)$:

$$u(p)-f(p)-\int\limits_{\omega} k(p,q)\,u(q)\,d\omega_q=0, \tag{1}$$

где $\lambda=1$—нехарактеристическое число, придется рассматривать „близкое“ к нему интегральное уравнение (2):

$$u_n(p)-f_n(p)-\int\limits_{\omega} k_n(p,q)\,u_n(q)\,d\omega_q=0, \tag{2}$$

которое будем называть „усеченным“.

Нормы, если не будет оговорено противное, будем определять в пространстве L_2. Будем обозначать норму обратного оператора для уравнения (1) через $\| k^{-1} \|$, а для уравнения (2) через $\| k_n^{-1} \|$.

Положив

$$f(p)-f_n(p)=\varphi_n(p); \quad k(p,q)-k_n(p,q)=r_n(p,q);$$

$$u_n(p)-f(p)-\int_\omega k(p,q)\,u_n(q)\,d\omega_q=-\varphi_n(p)-\int_\omega r_n(p,q)\,u_n(q)\,d\omega_q=\psi_n(p),$$

непосредственно получаем оценки:

$$\begin{gathered} \|\psi_n(p)\| \leqslant \|\varphi_n(p)\| + \|r_n(p,q)\|\,\|k_n^{-1}\|\,\|f_n(p)\|, \\ \|u(p)-u_n(p)\| \leqslant \|\psi_n(p)\|\,\|k^{-1}\|. \end{gathered} \tag{3}$$

Известно [1], что если $\|r_n(p,q)\|\,\|k_n^{-1}\|<1$ или $\|r_n(p,q)\|\,\|k^{-1}\|<1$, то из разрешимости уравнения (1) следует разрешимость уравнения (2) и наоборот, а также имеют место соотношения

$$\|k^{-1}\| \leqslant \frac{\|k_n^{-1}\|}{1-\|k_n^{-1}\|\,\|r_n(p,q)\|}, \quad \|k^{-1}\| \geqslant \frac{\|k_n^{-1}\|}{1+\|k_n^{-1}\|\,\|r_n(p,q)\|}. \tag{4}$$

Теорема. *Если в интегральном уравнении* (1) *функция* $f(p)\in O(d,M)$ *и за приближенное решение* (1) *принять функцию* $f(p)$, *то оценка погрешности определяется формулами*

$$|u(p)-f(p)| \leqslant \|k^{-1}\|_r\,\varepsilon(p,d)\,M\,\mathrm{mes}\,\omega, \tag{5}$$

$$|u(p)-f(p)| \leqslant \left[1+\left(\int_\omega k^2(p,q)\,d\omega_q\right)^{1/2}\|k^{-1}\|\right]\varepsilon(p,d)\,M\,\mathrm{mes}\,\omega, \tag{5'}$$

где $\|k^{-1}\|_r$ — *норма обратного оператора в метрике Чебышева, а* $\varepsilon(p,d)$ *определяется условием непрерывности ядра* $k(p,q)$, *т. е. как только* $\rho(q_1,q_2)<d$, *то* $|k(p,q_1)-k(p,q_2)|<\varepsilon(p,d)$.

Действительно, выбрав в области ω_i точку q_i для $i=1,2,\ldots,n$ и воспользовавшись сначала неравенством Буняковского, а затем Коши, будем иметь

$$\left|\int_\omega k(p,q)f(q)\,d\omega_q\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\omega_i}[k(p,q)-k(p,q_i)]\,f(q)\,d\omega_q\right| < \\ < \varepsilon(p,d)\,M\,\mathrm{mes}\,\omega. \tag{6}$$

Теперь, положив в уравнении (1) $u(p)=v(p)+f(p)$, для $v(p)$ получим интегральное уравнение

$$v(p)-\int_\omega k(p,q)f(q)\,d\omega_q-\int_\omega k(p,q)\,v(q)\,d\omega_q=0. \tag{7}$$

Из (6) и (7) непосредственно следует (5) и (5′).

Следствие. *Если ядро* $k(p,q)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$|k(p,q_1)-k(p,q_2)| \leqslant A\rho(q_1,q_2),$$

а функция $f(p)\in\Sigma_O(M)$, *то неравенства* (5) *и* (5′) *переходят в неравенства*

$$|u(p)-f(p)| \leqslant \|k^{-1}\|_r\,AM\,\mathrm{mes}\,\omega, \tag{8}$$

$$|u(p)-f(p)| \leqslant \left[1+\left(\int_\omega k^2(p,q)\,d\omega_q\right)^{1/2}\|k^{-1}\|\right]AM\,\mathrm{mes}\,\omega. \tag{8'}$$

З а м е ч а н и е 1. Теорема и следствие легко обобщаются на системы интегральных уравнений.

П р и л о ж е н и е. Будем искать приближенное решение интегрального уравнения (1) в форме линейной комбинации $u_n(p)=\sum_{i=1}^{n} a_i \theta_i(p)$ из функций $\{\theta_i(p)\}$ некоторой полной ортонормированной системы. При подстановке $u_n(p)$ в (1) получим $\psi_n(p, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Коэффициенты a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ можно определить различными способами. Можно потребовать чтобы: 1) $\int_\omega \psi_n^2(p, a_1, a_2, \ldots, a_n)\, d\omega_p = \min$ — метод Ритца; 2) $\int_\omega \psi_n(p, a_1, \ldots, a_n)\theta_i(p)\, d\omega_p = 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — метод Галеркина; 3) $\psi_n(p_i, a_1, \ldots, a_n)=0$ — метод Канторовича (где p_i $(i=1,2,\ldots,n)$ — выбранные точки из области ω); 4) $\psi_n(p, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in O(d, M)$ — метод осциллирующих функций.

При решении уравнения (1) методом Галеркина определение коэффициентов a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ равносильно решению „усеченного" уравнения ([2])

$$u_n(p)=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \theta_k(p)+\int_\omega \sum_{k=1}^{n} \beta_k(q)\theta_k(p) u_n(q)\, d\omega_q, \tag{9}$$

где $\alpha_k=\int_\omega f(p)\theta_k(p)\, d\omega_p$, $\beta_k(q)=\int_\omega k(p,q)\theta_k(p)\, d\omega_p$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

Оценка погрешности дается неравенствами (3) и (4). Полученные для метода Галеркина оценки не могут быть улучшены и для метода Ритца, так как для некоторых ядер при специальном подборе ортонормированной системы метод Ритца совпадает с методом Галеркина.

Рассмотрим теперь случай, когда за систему функции $\{\theta_i(p)\}$ приняты тригонометрические функции $\{\cos kx, \sin kx\}$ $(k=0,1,2,\ldots)$, а интегральное уравнение

$$u(x)-f(x)-\int_{-\pi}^{+\pi} k(x,t)u(t)\,dt=0 \tag{10}$$

имеет ядро, удовлетворяющее условию Липшица:

$$|k(x,t_1)-k(x,t_2)| \leqslant A(x)|t_1-t_2|.$$

Будем строить приближенное решение $u_n(x)$ методом Галеркина, тогда функция $\psi_n(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx+\beta_k \sin kx) \in \Sigma_O(M)$, где $M \leqslant \|\psi_n(p)\| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$; положив $v_n(x)=u_n(x)-\psi_n(x)$, для $|u(x)-v_n(x)|$ имеем оценку (8′), которая значительно лучше, чем оценка для $|u(x)-u_n(x)|$.

Практический интерес представляет приближенное решение уравнения (10) при помощи специальной ортогональной системы функций, а именно: сегмент $[-\pi, \pi]$ разобьем на части точками $x_0=-\pi<x_1<<x_2<\ldots<x_n=\pi$ и положим:

$$\theta_{i+1}(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ принадлежит сегменту } [x_i, x_{i+1}];\\ 0, \text{ если } x \text{ не принадлежит сегменту } [x_i, x_{i+1}]\end{cases}$$

$(i=0,1,2,\ldots,n)$.

Приближенное решение урвнения (10) будем искать в форме $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \theta_k(x)$; коэффициенты a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ будем определять по методу Галеркина; для данной системы функций метод Галеркина совпадает с методом осциллирующих функций. Удобство выбранной системы функций заключается в легкости определения оценок для $\varphi_n(x)$ и $r_n(x, t)$. Функция $\varphi_n(x)$ не превосходит наибольшего из колебаний функции $f(x)$ на сегментах $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, 2, \ldots \ldots, n-1)$, аналогично и $r_n(x, t)$. Кроме того $\psi_n(x) \in O(d, M)$, где $d = \max\limits_{(i=0,1,\ldots,n-1)} |x_{i+1} - x_i|$, а M оценивается согласно (3).

Следует отметить, что при приближенном решении заданного интегрального уравнения методом Галеркина с заданной точностью существенным является не полнота системы, а возможность при помощи выбранных функций достаточно хорошо аппрокисимировать в метрике Чебышева или в среднем ядро $k(p, q)$ и функцию $f(p)$. Это утверждение непосредственно вытекает из рассмотрения уравнений (1) и (9) и оценок (3), и этим положением мы воспользовались в последнем примере.

Замечание 2. Для того чтобы приближенное решение уравнения (10) можно было построить методом осциллирующих функций, если дана некоторая ортонормированная система функций $\{\theta_i(x)\}$, достаточно, чтобы функцию $f(x)$ и ядро $k(x, t)$ можно было достаточно хорошо аппроксимировать в среднем функциями системы $\{\theta_i(x)\}$, так чтобы выполнялись условия

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \theta_k(x) \right] dx = 0,$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[k(x, t) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k(t) \theta_k(x) \right] dx = 0 \quad (i=0, 1, \ldots, n-1); \tag{11}$$

тогда определение коэффициентов a_i равносильно решению усеченного уравнения

$$u_n(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \theta_i(x) - \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) \theta_i(x) u_n(t) dt = 0, \tag{12}$$

а оценка погрешности будет дана формулами (3) и (5).

Молотовский государственный университет им. А. М. Горького

Поступило 21 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, **3**, **6** (28), 110 (1948). [2] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1940, стр. 165.