

А. Г. ВИТУШКИН

## К ТРИНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 I 1954)

Еще в 1900 г. Гильбертом было высказано предположение о существовании аналитических функций трех переменных

$$y = f(x_1, x_2, x_3),$$

не представимых никакой конечной суперпозицией непрерывных функций двух переменных\*. Эта гипотеза остается не доказанной и не опровергнутой. В настоящей заметке будет доказано существование при любых  $n > 2$ ,  $l \geq 1$  функции

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

с непрерывными частными производными до  $l$ -го порядка включительно, не представимой в виде конечной суперпозиции функций  $n - 1$  переменного, у которых все частные производные  $l - 1$ -го порядка удовлетворяют условию Липшица. Доказательство непредставимости функции  $F$  суперпозициями указанного вида опирается на „основную лемму“, которая доказывается при помощи оценок вариаций, данных в заметке (1). Само построение функции  $F$  и доказательство того, что она удовлетворяет выдвинутым условиям, кроме основной леммы, использует обычные методы теории приближений функций многочленами (§§ 2—3).

§ 1. Основная лемма. Пусть  $y_i = P_i(z_1, z_2, \dots, z_q)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — многочлены степени не выше  $r$  относительно каждого из переменных;  $z_j, a_i$  — произвольные константы ( $i = 1, 2, \dots, m$ )

$$2^m > [16(q + 1)]^q (6r)^{3q} qm^q. \quad (1)$$

Тогда можно подобрать такие

$$\varepsilon_i = \pm 1/4, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

что ни при каких  $z_1, z_2, \dots, z_q$  не будут выполняться одновременно неравенства

$$|y_i - a_i - \varepsilon_i| \leq 1/8, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Для доказательства основной леммы рассмотрим вариацию множества  $\varepsilon$ , являющегося образом пространства  $z$ -ов в пространстве

\* В соответствии с указанием Гильберта, аналитическую функцию  $y = f(x_1, x_2, x_3)$ , не представимую конечной суперпозицией аналитических функций двух переменных, легко построить, пользуясь тем, что между коэффициентами ряда Тейлора функций, представимых каждым из счетного числа различных типов суперпозиций, существуют определенные соотношения.

у-ов. В силу неравенства (6) из (1) вариация  $\omega$  этого множества в кубе

$$a_i - 1/2 < y_i < a_i + 1/2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

имеет оценку сверху

$$\omega \leq (6r)^{3q} qm^q. \quad (3)$$

Если, вопреки заключению основной леммы, допустить, что при любых  $\varepsilon_i = \pm 1/4$  множество  $\varepsilon$  имеет точки, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам  $|y_i - a_i - \varepsilon_i| \leq 1/8$ , то, применяя к каждому из  $2^m$  кубов, на которые разбивается куб (2) плоскостями  $y_i = a_i$ , неравенство (5) из (1), получим, с другой стороны,

$$\omega \geq 2^m \left( \frac{1}{16(q+1)} \right)^q. \quad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает

$$2^m \leq [16(q+1)]^q (6r)^{3q} qm^q.$$

Очевидно, что обратного неравенства достаточно для получения заключения основной леммы.

§ 2. Аппроксимация суперпозиций функций суперпозициями многочленов. Функция  $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  будет определена во всех точках  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  единичного куба  $I_n$ :

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Заданная на том же кубе функция  $\Phi(x)$  называется суперпозицией  $s$ -го порядка, порожденной функциями  $n-1$  переменных

$$\varphi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{(\alpha)}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}),$$

$$\alpha = 0, 1, \dots, s; \quad \beta_i = 1, 2, \dots, n-1,$$

если она определяется на  $I_n$  соотношениями

$$\Phi = \varphi^{(0)}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_{n-1}^{(1)}),$$

$$u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{(\alpha)} = \varphi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{(\alpha)}(u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s \alpha 1}^{(\alpha+1)}, u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s \alpha 2}^{(\alpha+1)}, \dots, u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s \alpha n-1}^{(\alpha+1)}),$$

$$u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{(s)} = x_{\gamma(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)}.$$

Суперпозиция  $\Phi$  полностью определяется своей „сигнатурой“ (функцией, принимающей значения  $1, 2, \dots, n$ , от  $s$  переменных, пробегающих значения  $1, 2, \dots, n-1$ )  $\gamma(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$  и заданием  $\tau_s = 1 + (n-1) + (n-1)^2 + \dots + (n-1)^{s-1} \leq n^s$  функций  $\varphi(\alpha)$ . Можно предполагать функции  $\varphi(u)$  определенными на всем пространстве  $R^{n-1}$ : в силу возможности продолжения функций на все пространство с сохранением гладкости это не приведет к существенному уменьшению общности окончательных результатов.

Для любой конкретной суперпозиции множества тех значений их аргументов  $u$ , которые фактически используются для вычисления  $\Phi(x)$  на  $I_n$ , будут ограничены. Поэтому из известных теорем о приближении функций многочленами вытекает

Лемма 1. Если функции  $\varphi(u)$  имеют  $l-1$ -е производные, удовлетворяющие условию Липшица, то существует такая константа  $C$ , что при любом  $k$  может быть построена система многочленов

$$\Psi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{(\alpha)}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$$

степени  $k$  по каждому из переменных, для которой суперпозиция  $\Psi_k(x)$ , построенная по схеме суперпозиции  $\Phi(x)$ , будет удовлетворять на всем  $I_n$  неравенству

$$|\Phi - \Psi_k| \leq \frac{C}{k^l}.$$

При заданной сигнатуре  $\gamma(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$  многочлен  $\Psi_k(x)$  кроме переменных  $x_i$  зависит еще только от коэффициентов многочленов  $\Psi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{(\alpha)}$ . Эти коэффициенты мы занумеруем подряд:

$$c_1, c_2, \dots, c_{q_{ks}},$$

где  $q_{ks} = \tau_s(k+1)^{n-1}$  обозначает их общее число (для всех многочленов  $\Psi$ ). Легко видеть, что

$$\Psi_k = \Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n; c_1, c_2, \dots, c_{q_{ks}})$$

по каждому из переменных  $x_i$  и  $c_j$  является многочленом степени не выше  $r_{ks} \leq (nk)^{s+1}$ .

§ 3. Построение функции  $F(x)$ . Искомая функция  $F(x_1, \dots, x_n)$  представляется в виде ряда

$$F(x) = \sum_{\xi=1}^{\infty} H_{\xi}(x) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} F_{\xi}(x),$$

где

$$F_{\xi}(x) = \sum_{\eta=1}^{\xi} H_{\eta}(x).$$

Для доказательства непредставимости  $F(x)$  в виде итераций существуют значения  $H_{\xi}(x)$  в точках  $x$  с координатами вида

$$x_v = (a_v + 1/2) \Delta_{\xi}, \quad \Delta_{\xi} = \frac{1}{\mu_{\xi}},$$

где число  $\mu_{\xi}$  при каждом  $\xi$  фиксировано, а  $a_v$  пробегает значения  $1, 2, \dots, \mu_{\xi}$ . Таких точек в кубе  $I_n$  имеется

$$m_{\xi} = \mu_{\xi}^n.$$

Мы обозначим их  $x(\xi, i)$ , где индекс  $i$  пробегает значения  $1, 2, \dots, m_{\xi}$ , и положим

$$H_{\xi}(x(\xi, i)) = \frac{\Delta_{\xi}^l}{32 \xi} \varepsilon_i^{(\xi)}.$$

Лемма 2. При любых  $\mu_{\xi}$  и  $\varepsilon_i^{(\xi)} = \pm 1/4$  функции  $H_{\xi}(x)$  могут быть построены так, что

$$|H_{\xi}| \leq \frac{\Delta_{\xi}^l}{4 \cdot 32 \xi}, \quad (5)$$

а частные производные  $H_{\xi}(x)$  порядка не выше  $l$  непрерывны и не превышают по абсолютной величине  $C/32 \xi^l$ , где  $C$  — некоторая абсолютная константа.

Легко видеть, что в случае, если функции  $H_{\xi}(x)$  построены в соответствии с леммой 2, то функция  $F(x)$  имеет непрерывные производные всех порядков до  $l$  включительно. Остается подобрать  $\mu_{\xi}$  и  $\varepsilon_i^{(\xi)}$  так, чтобы функция  $F(x)$  не могла быть представлена суперпозицией интересующего нас вида.

Лемма 3. Можно подобрать

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_\xi \leq \dots \rightarrow \infty$$

так, что для  $k_\xi = \lfloor \mu_\xi^{1 - \frac{1}{2(n-1)}} \rfloor$

$$m_\xi = \mu_\xi^n, \quad q_\xi = q_{k_\xi s_\xi}, \quad r_\xi = r_{k_\xi s_\xi}$$

будут выполняться соотношения

$$2^{m_\xi} > [16(q_\xi + 1)]^{q_\xi} (6r_\xi)^{3q_\xi} m_\xi^{q_\xi},$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\Delta_\xi^l k_\xi^l}{32^\xi} \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Выбрав  $\mu_\xi$  в соответствии с леммой 3, можно последовательно строить функции  $H_\xi(x)$  с соблюдением всех ранее выдвинутых условий так, чтобы при каждом  $\xi$  ни для одного многочлена  $\Psi_{k_\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , являющегося  $\gamma_\xi$ -суперпозицией многочленов степени  $k_\xi$  от  $n-1$  переменного не могли одновременно выполняться все соотношения

$$|\Psi_{k_\xi}(x(\xi, i)) - \frac{32^\xi}{\Delta_\xi^l} F_{\xi-1}(x(\xi, i)) - \varepsilon_i^{(\xi)}| \leq \frac{1}{8}, \quad i = 1, 2, \dots, m_\xi.$$

Это возможно в силу основной леммы. При помощи леммы 2 и соотношений (5) и (6) легко теперь доказать, что функция  $F(x)$  не может быть суперпозицией функций  $n-1$  переменного,  $l-1$ -е производные которых удовлетворяют условию Липшица.

Московский государственный  
университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
25 I 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. Г. Витушкин, ДАН, 95, № 3 (1954).