

Г. Н. ПОВАРОВ

О СИНТЕЗЕ КОНТАКТНЫХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 7 XII 1953)

1. Создание научной теории релейно-контактных схем ⁽¹⁾ позволило разработать алгебраические методы синтеза схем. К их числу принадлежит метод синтеза схем при помощи универсальных многополюсников. Этот метод был использован К. Э. Шенноном ⁽²⁾ для синтеза контактных двухполюсников.

В настоящей заметке описываются два новых применения метода универсальных многополюсников: к синтезу контактных многополюсников некоторого общего вида и к синтезу симметрических контактных многополюсников. Для контактных двухполюсников приводятся некоторые уточнения результатов Шеннона.

2. Мы будем считать, что полюсы контактных многополюсников разделены на входы и выходы. Многополюсник с p входами и q выходами будет называться многополюсником порядка (p, q) или (p, q) -полюсником. Транспонированием многополюсника будет называться операция переименования входов в выходы и выходов во входы. Входы и выходы будут отдельно друг от друга нумероваться натуральными числами $1, 2, \dots$

Контактный (p, q) -полюсник называется разделительным (в прямом направлении), если структурные проводимости h_{ij} между его выходами i и j , где $i, j = 1, 2, \dots, q$ и $i \neq j$, равны нулю при любых состояниях приемных элементов.

Теорема 1. Пусть M — разделительный (p, q) -полюсник с проводимостями $f_{ij}^{(M)}$ между входом i и выходом j и пусть N — любой (r, s) -полюсник с проводимостями $f_{ij}^{(N)}$ между входом i и выходом j . Пусть каждый выход i схемы M соединен с одним и только одним входом $\tau(i)$ схемы N (см. рис. 1). Тогда проводимости f_{ij} между входом i и выходом j результирующего (p, s) -полюсника суть

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^q f_{ik}^{(M)} f_{\tau(k)j}^{(N)},$$

где $i = 1, 2, \dots, p$ и $j = 1, 2, \dots, s$.

В самом деле, правая часть равенства описывает пути из i в j , пересекающие линию раздела между M и N один раз, а других путей не может быть ввиду разделительности M .

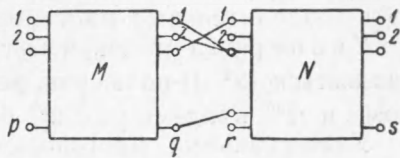


Рис. 1

В случае любого M теорема перестает быть справедливой. Аналогичная теорема М. Л. Цетлина (3) об умножении матриц проводимостей также применима только в случаях, когда сумма проводимостей всех путей из i в j совпадает с суммой проводимостей путей, пересекающих линию раздела один раз.

3. Мы применим теорему 1 к синтезу контактных $(k, 1)$ -полюсников и получаемых из них транспонированием $(1, k)$ -полюсников. С их помощью можно синтезировать любые однотактные релейно-контактные схемы.

В качестве M мы возьмем k попарно изолированных контактных деревьев, а в качестве N — универсальный многополюсник.

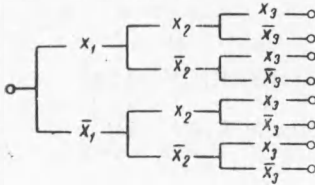


Рис. 2

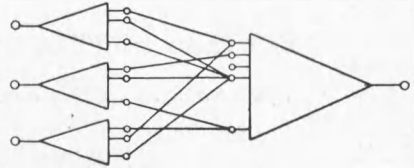


Рис. 3

Контактное дерево («дуальная схема») n переменных (см. рис. 2) реализует конstituенты единицы и содержит $2^{n+1} - 2$ контактов*. Мы будем считать дерево $(1, 2^n)$ -полюсником.

Дерево, а следовательно, и группа попарно изолированных деревьев суть разделительные многополюсники.

Универсальным многополюсником n переменных будет называться $(2^{2^n}, 1)$ -полюсник, реализующий между единственным выходом и 2^{2^n} входами все 2^{2^n} булевых функций этих переменных.

Универсальный многополюсник n переменных можно построить с

$$2 \cdot 2^{2^n} - 2 \sum_{i=0}^{n-1} 2^{2^i} + 2n - 4$$

контактами. При малых n эта оценка дает несколько большую точность, чем верхняя граница $2 \cdot 2^{2^n}$, данная в (2).

Теорема 2. Любые k булевых функций n переменных

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

реализуются при любом t , $0 \leq t \leq n$, соединением группы k контактных деревьев $n - t$ переменных x_1, x_2, \dots, x_{n-t} и универсального многополюсника t переменных x_{n-t+1}, \dots, x_n (см. рис. 3).

В самом деле, разложим f_1, f_2, \dots, f_k на конstituенты единицы по x_1, x_2, \dots, x_{n-t} . Тогда коэффициенты разложения суть функции переменных x_{n-t+1}, \dots, x_n .

Деревья реализуют конstituенты единицы, универсальный многополюсник — все возможные коэффициенты при них. Так как группа k деревьев есть разделительный многополюсник, то применима теорема 1. Если соединить выходы деревьев со входами универсального многополюсника согласно разложениям функций f_1, f_2, \dots, f_k , то результирующая схема будет обладать проводимостями f_1, f_2, \dots, f_k между своим единственным выходом и k входами.

* Под контактом понимается либо замыкающий, либо размыкающий контакт. Переключающий контакт считается за два контакта.

Теорема 2 позволяет построить $(k, 1)$ -полюсник с любыми условиями проводимости f_1, f_2, \dots, f_k между выходом и входами, а тем самым и любой $(1, k)$ -полюсник.

4. Схема, полученная по теореме 2, содержит не более

$$\varphi(m) = k(2^{n-m+1} - 2) + 2 \cdot 2^{2^m} - 2 \sum_{i=0}^{m-1} 2^{2^i} + 2m - 4$$

контактов, будучи при заданных k и n функцией m .

Знак разности

$$\Delta\varphi = \varphi(m+1) - \varphi(m)$$

совпадает со знаком монотонно возрастающей функции

$$\psi(m) = -k \cdot 2^n + 2^{m+1}(2^{2^{m+1}} - 2 \cdot 2^{2^m} + 1).$$

Поэтому $\varphi(m)$ имеет на $[0, n]$ не более двух целочисленных точек минимума, причем в случае двух точек они являются соседними.

Наименьшее неотрицательное целое число M , для которого

$$k \cdot 2^n < 2^{M+1}(2^{2^{M+1}} - 2 \cdot 2^{2^M} + 1),$$

есть наибольшая точка минимума для $\varphi(m)$.

Пусть M_1 — наименьшее неотрицательное целое число, для которого

$$[\log_2 k] + n < M_1 + 1 + 2^{M_1+1},$$

где $[\log_2 k]$ — характеристика $\log_2 k$. Тогда

$$M_1 \leq M \leq M_1 + 1.$$

Если k есть 1 или степень двух и $M_1 > 0$, то * $M_1 = M$.

Нетрудно видеть, что при $\log_2 k + n \geq 1$

$$\varphi(M_1) < f(\log_2 k + n) - 2k,$$

где $f(\beta) = 2^{\beta-M_1+1} + 2 \cdot 2^{2^{M_1}}$, а M_1 определяется из неравенств

$$M_1 + 2^{M_1} \leq \beta < M_1 + 1 + 2^{M_1+1}.$$

Теорема 3. При $\log_2 k + n \geq 1$ любые k функций n переменных реализуются не более чем с

$$\frac{k \cdot 2^{n+3}}{\log_2 k + n} - 2k$$

контактами; каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое n_0 , что при $n > n_0$ любые k функций требуют не более

$$(1 + \varepsilon) \frac{k \cdot 2^{n+2}}{\log_2 k + n} - 2k$$

контактов.

5. Назовем рабочим числом симметрической булевой функции число аргументов, истинность которых влечет истинность функции. Назовем далее элементарной симметрической функцией симметрическую функцию ровно с одним рабочим числом.

* Статья (2) содержит ошибку: автор принимает за M наименьшее целое число, для которого (рассматривается лишь $k=1$)

$$n \leq M + 1 + 2^{M+1}.$$

В связи с этим для некоторых n им указаны ошибочные M .

Далее, оценка $\varphi(M)$ представляет собой при $k=1$ уточнение оценки $f(M)$ в (2). Оценка $2^{n-1} + 18$, приводимая в (2), либо совпадает с $\varphi(M)$, либо больше ее. В силу этого $m=2$ является точкой минимума границы числа контактов только для $6 \leq n \leq 10$, а не для $6 \leq n \leq 13$, как указано в (2).

Существует $n + 1$ элементарных симметрических функций n переменных. Всякая симметрическая функция n переменных однозначно разлагается в сумму элементарных симметрических функций.

Решетка элементарных симметрических функций n переменных (см. рис. 4) реализует между своим входом и $n + 1$ выходами все элементарные симметрические функции этих переменных и содержит $n^2 + n$ контактов. Решетки суть разделительные многополюсники.

Универсальный многополюсник симметрических функций n переменных есть $(2^{n+1}, 1)$ -полюсник, реализующий все 2^{n+1} симметрических функций этих переменных. Его можно построить с $2^{n+3} - 6n - 8$ контактами.

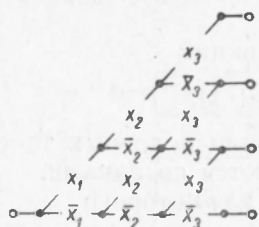


Рис. 4

Теорема 4. Любые k симметрических функций n переменных реализуются при любом m , $0 \leq m \leq n$, соединением группы k решеток элементарных симметрических функций $n - m$ переменных и универсального многополюсника симметрических функций m переменных*.

В самом деле, разложим реализуемые функции на элементарные симметрические функций по $n - m$ переменным. Тогда коэффициенты разложения суть симметрические функции остальных m переменных, и мы можем поступить так же, как в теореме 2. Результирующая схема содержит не более $k(n - m)^2 + k(n - m) + 2^{m+3} - 6m - 8$ контактов.

Наименьшее неотрицательное целое M , для которого

$$kn + 3 < kM + 2^{M+2},$$

есть наибольшая точка минимума для $\varphi_{\text{сим}}(m)$.

Теорема 5. При $n \geq 16$ и $k \leq \frac{2^{n/2}}{n}$

$$[\log_2 kn] - 2 \leq M \leq [\log_2 kn] - 1.$$

Для $k > 1$ оценки до сих пор не было, для $k = 1$ лучшая оценка⁽²⁾ была $n^2 - n + 2$. Оценка, приводимая здесь, близка при $k = 1$ к $n^2 - 2n [\log_2 n]$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
31 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Гаврилов, Теория релейно-контактных схем, М.—Л., 1950.
² С. Е. Шаппол, The Bell. Syst. Techn. J., 28, № 1, 59 (1949). * М. Л. Цетлин, ДАН, 86, № 3, 525 (1952).

* Для $k = 1$ аналогичные результаты независимо получил С. В. Яблонский.