

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

## КАК НАРАСТАЕТ ДЛИНА ВОЛН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕТРА

В предыдущей статье (1) исследован внутренний механизм питания волн энергией от ветра. Совершенно очевидно, что увеличение кинетической и потенциальной энергии волн непосредственно проявляется в нарастании высоты волн, поскольку полная энергия связана прямой зависимостью с квадратом высоты волн. Как известно, длина волн не входит в соотношение, которое определяет полную энергию, приходящуюся на единицу поверхности моря. Именно поэтому физическая причина нарастания длины волн под действием ветра всегда ускользала от исследователей, подходивших к энергетическим задачам. Попытаемся доказать, что и причина и закономерности нарастания длины волн могут быть обнаружены весьма легко, если мы применим теорему о кинетическом моменте к частицам воды, описывающим почти круговые орбиты на волне.

Обозначим через  $\omega$  угловую скорость их движения, через  $r_0$  — радиус орбиты поверхностной частицы, через  $y$  — глубину залегания какого-то произвольного элементарного слоя воды, через  $\delta$  — плотность воды и через  $\lambda$  — длину волны в некоторый момент времени. В дальнейшем вместо  $\lambda$  будем применять величину  $R$ , связанную с ней соотношением  $R = \lambda / 2\pi$ . В геометрии волн  $R$  играет роль так называемого радиуса круга качения.

Выберем центр моментов в центре орбиты одной из поверхностных частиц и будем считать положительным направление вертикальной оси координат вниз от этой точки, обозначенной буквой  $O_0$  на рис. 1. Если единица длины мала по сравнению с длиной волны, то можно считать фазу кругового движения частиц везде одной и той же в ее пределах. Пусть это — та фаза, в которой изображена частица  $N$  на рис. 1, где она отошла на угол  $\theta$  от оси  $y$  и обладает линейной скоростью, изображенной вектором  $u$ .

На чертеже  $O_0 O_y = y$ . Значит, на глубине  $y$  скорость  $u$  выражается так:

$$u = \omega r = \omega r_0 e^{-y/R}. \quad (1)$$

С другой стороны, плечо  $OS$  тоже связано с  $y$ :

$$OS = r + y \cos \theta = r_0 e^{-y/R} + y \cos \theta. \quad (2)$$

Следовательно, взяв момент количества движения  $dQ_0$  для элементарного слоя  $dy$  относительно центра моментов  $O_0$ , получим (попрежнему в расчете на единицу площади моря):

$$dQ_0 = \delta \omega (r_0^2 e^{-2y/R} + r_0 y e^{-y/R} \cos \theta) dy. \quad (3)$$

Глубину моря мы считаем чрезвычайно большой по сравнению с длиной волн. Поэтому, проинтегрировав выражение (3) от нуля до беско-

нечности, найдем следующее выражение для полного кинетического момента в фазе  $\theta$ :

$$Q_{\theta} = \delta\omega (1/2 r_0^2 R - r_0 R^2 \cos \theta). \quad (4)$$

Как видим, амплитуда колебаний второго члена правой части (во времени) во столько раз превышает первый — постоянный — член, во сколько раз удвоенный радиус круга качения превышает радиус орбиты поверхностной частицы. Это обстоятельство рисуется совершенно естественным при наблюдении движения водных масс из точки  $O_0$ : ведь в продолжение половины периода волн эти массы движутся в одну сторону относительно  $O_0$ , а в продолжение другой половины — в противоположную сторону. Эти колебания тесно связаны с колебаниями потенциальной энергии волн вокруг ее средней величины в продолжение одного периода волн.

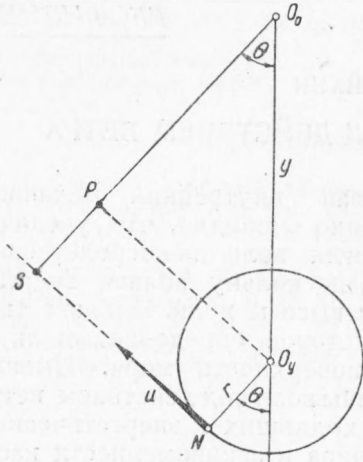


Рис. 1

Теорему о кинетическом моменте, очевидно, следует применить не к величине  $Q_{\theta}$ , выражаемой уравнением (4), а к величине  $\bar{Q}$ , осредненной за период, т. е. к величине, выражаемой первым членом (4):

$$\bar{Q} = 1/2 \delta\omega r_0^2 R. \quad (5)$$

Отметим следующее: угловую скорость  $\omega$  мы здесь считаем неизменной в пределах одного периода; между тем в одной из предыдущих работ <sup>(2)</sup> нами было предположено, что  $\omega$  колеблется в пределах одного периода, оказываясь наибольшей на вершине волн и наименьшей на подошве. В связи с этим можно было бы изменить вывод и показать аналогичным способом, что измененное выражение среднего кинетического момента таково:

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \delta\omega abR \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a-b}{R} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (6)$$

Здесь через  $a$  и  $b$  обозначены (в соответствии с цитированной статьёй <sup>(2)</sup>) большая и малая полуоси вспомогательного эллипса, предложенного для построения профиля ветровой волны. Чем больше отличается от трохойды этот профиль, тем существенней делается внесенная поправка с количественной стороны. Однако никаких принципиальных изменений в выводы она не вносит. Поэтому в дальнейшем мы будем здесь пользоваться не выражением (6), а выражением (5).

Прежде всего вспомним, что  $\omega = 2\pi/T$  и  $2\pi R/T = c$ , где  $c$  — фазовая скорость волн. Значит, вместо (5) запишется

$$\bar{Q} = 1/2 \delta r_0^2 c. \quad (7)$$

На основании работы <sup>(1)</sup> известно, что действующая сила, передающая волне энергию от ветра, меняется по величине в различных фазах орбитального движения частиц. Обозначим через  $\bar{M}$  значение момента этой силы, осредненное за один период волн  $T$ . Тогда можно будет записать теорему о кинетическом моменте водных масс в форме

$$\bar{M} = \frac{d\bar{Q}}{dt}. \quad (8)$$

С другой стороны, если мощность, передаваемая ветром единице поверхности моря, равна  $W_v$ , то

$$\bar{M} = \frac{W_v}{\omega}. \quad (9)$$

В статье (1) видно, что  $W_v$  хорошо вычисляется по нашей теоретической формуле только тогда, когда скорости ветра малы и на поверхности основных волн нет волн высоких порядков, создающих местные заострения. Для общности воспользуемся не теоретической формулой, а эмпирической, выведенной на основании наших опытов в штормовом бассейне и применимой при всех скоростях до 17—19 м/сек. На основании этой формулы при скорости ветра  $V$  и фазовой скорости волн  $c$  будет:

$$W_v = Ar_0(V - c)^2. \quad (10)$$

Исходя из (9), (10), запишем

$$\bar{M} = \frac{Ar_0}{\omega}(V - c)^2 = Ar_0 \frac{R}{c}(V - c)^2. \quad (11)$$

Подставим теперь в (8) выражение  $\bar{M}$  из (11) и выражение  $d\bar{Q}/dt$ , которое получается при дифференцировании (7) по времени  $t$ . Тогда после сокращения на  $r_0$  окажется:

$$\partial c \frac{dr_0}{dt} + \frac{1}{2} \delta r_0 \frac{dc}{dt} = A \frac{R}{c} (V - c)^2. \quad (12)$$

Помножим обе части равенства (12) на  $c/R$  и вспомним некоторые соотношения, вытекающие из хорошо известных выражений для  $R$  и  $\lambda$ :

$$\frac{c^2}{R} = g; \quad c \frac{dc}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (c^2) = \frac{1}{2} g \frac{dR}{dt}.$$

После простейших преобразований получим:

$$\frac{dR}{dt} + 4 \frac{R}{r_0} \frac{dr_0}{dt} - 4 \frac{A}{\delta g} \frac{R}{r_0} (V - c)^2 = 0. \quad (13)$$

Но и в таком виде уравнение заведомо не интегрируется: оно учитывает и нарастание длины волн ( $2\pi R = \lambda$ ) и нарастание высоты ( $2r_0 = h$ ). Однако нетрудно получить из (13) приближенное уравнение, которое проинтегрируется в квадратурах.

Действительно, наши опыты показали, что на довольно большом начальном этапе величина  $dr_0/dt$  практически остается постоянной. Следовательно, с достаточным приближением можно записать:

$$\frac{dr_0}{dt} = n = \text{const}; \quad r_0 = nt. \quad (14)$$

Подстановка этих выражений в (13) дает:

$$\frac{dR}{dt} - m \frac{R}{t} = 0, \quad (15)$$

где сокращенно обозначено

$$m = 4 \left[ \frac{A(V - c)^2}{\delta gn} - 1 \right]. \quad (16)$$

В результате интегрирования (15) получаем:

$$R = B_1 t^m \quad (17)$$

или, окончательно,

$$\lambda = B t^m. \quad (18)$$

Любопытно, что на основании наших работ в бассейне можно считать безразмерную величину  $A(V-c)^2/\delta g n$  в скобках выражения (16) практически постоянной при всех исследованных режимах ветра. К сожалению, она меньше двух, а потому неизбежные ошибки в экспериментальном определении этой константы приводят к большой неточности при вычислении величины  $m$  в (18) по (16). Второй неприятной особенностью выражения (18) является невозможность определения постоянной интеграции  $B$  по начальным условиям. Физический смысл этого обстоятельства ясен: питание волн энергией ветра на основании (10) подразумевается лишь применительно к конечной высоте волн (хотя бы и чрезвычайно малой). Сама эта конечная амплитуда возникает вначале вследствие неустойчивости границы между двумя разнородными соприкасающимися движущимися средами.

Однако оба упомянутых неприятных обстоятельства не мешают проверить изложенные теоретические соображения, если рассмотреть тенденции нарастания длины волн и приближенно определить их на основании опытов в бассейне. Такая проверка показывает, что  $m \approx 1,5$  и что ход кривых нарастания  $\lambda$  во времени хорошо описывается уравнением (18), в котором  $B$  определяется для каждой кривой по одной какой-либо экспериментальной точке.

Любопытно также, что сопоставление (18) с (14) дает вполне удовлетворительную зависимость между отношением  $r_0/\lambda$  и временем  $t$ :

$$\frac{r_0}{\lambda} = \frac{n}{B} t^{-0,5}. \quad (19)$$

Примерно по такому закону уменьшается крутизна ветровых волн на начальных этапах их развития при различных ветровых режимах, создаваемых в нашем бассейне.

Морской гидрофизический  
институт  
Академии наук СССР

Поступило  
3 I 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. В. Шулейкин, ДАН, 94, № 4 (1954). <sup>2</sup> В. В. Шулейкин, ДАН, 93, № 2, 265 (1953).