

Л. М. ЛЕВИН

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАЧНЫХ
И ДОЖДЕВЫХ КАПЕЛЬ ПО РАЗМЕРАМ

(Представлено академиком Г. А. Гамбурцевым 4 XII 1953)

Современные теории образования и развития облаков и осадков существенным образом связаны с теоретическими или эмпирическими функциями распределения облачных и дождевых капель по размерам. В хронологическом порядке в этих теориях использовались 4 функции распределения: Смолуховского — Шумана (¹⁻³), Маршалла — Пальмера (⁴), Беста (^{5, 6}) и Хргиана — Мазина (⁷). Из них первая, теоретическая, формула была получена Смолуховским для коллоидов и та же схема получения функции распределения была без достаточных оснований перенесена Шуманом на облачные капли. Остальные функции распределения — эмпирические.

В 1941 г. А. Н. Колмогоровым было показано (⁸), что при довольно общей схеме случайного процесса дробления частиц в пределе получается логарифмически нормальное распределение частиц по размерам. Естественно предположить, что логарифмически нормальное распределение может получиться и при случайном процессе коагуляции капель облачных размеров в предельном случае большого числа актов слияния частиц.

В 1952—1953 гг. в Эльбрусской экспедиции Геофизического института АН СССР был собран большой статистический материал, позволяющий рассмотреть вопрос о функции распределения облачных частиц и наметить предположения о функции распределения дождевых частиц*.

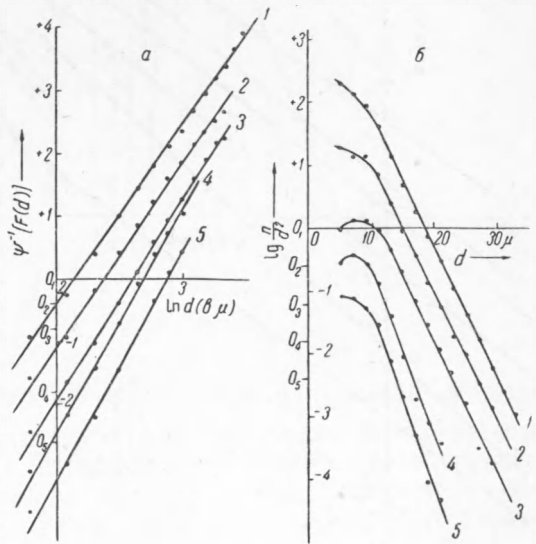


Рис. 1. 1—3 IX 1953 г., 18 час. 00 мин., $N = 27800$, $\sigma = 0,35$, $d_0 = 8,6 \mu$; 2—3 IX 1953 г., 18 час. 30 мин., $N = 16000$, $\sigma = 0,35$, $d_0 = 9,3 \mu$; 3—3 IX 1953 г., 19 час. 00 мин., $N = 7500$, $\sigma = 0,31$, $d_0 = 10,7 \mu$; 4—19 IX 1953 г., 18 час. 45 мин., $N = 4350$, $\sigma = 0,30$, $d_0 = 8,8 \mu$; 5—19 IX 1953 г., 19 час. 00 мин., $N = 3900$, $\sigma = 0,27$, $d_0 = 8,8 \mu$

* Экспериментальная методика исследования микроструктуры облаков, принятая в экспедиции, описана в (⁹). Спектры дождя исследовались методом окрашенной фильтровальной бумаги.

На рис. 1а даны «выпрямленные диаграммы» ⁽¹⁰⁾ для распределения облачных капель, набранных из индивидуальных облаков, по размерам. По оси абсцисс отложено значение логарифма диаметра капель d в микронах, по оси ординат $\Psi^{-1} [F(d)]$, где $F(d)$ — функция распределения выборки, а $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ (здесь Ψ^{-1} — функция, обратная функции Ψ). В этих координатах для логарифмически нормального распределения, у которого плотность распределения задается формулой

$$n(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} x} e^{-[\ln \frac{x}{x_0}]^2 / 2\sigma^2}, \quad (1)$$

экспериментальные точки должны лечь на прямую линию. Точка пересечения этой прямой с осью абсцисс дает $\ln x_0$, а тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс равен $1/\sigma$ ⁽¹⁰⁾.

Рис. 1а показывает, что полученные экспериментальные данные для облаков удовлетворительно описываются логарифмически нормальной функцией распределения.

В настоящее время в экспедиции накоплено более 30 проб облачных капель с числом капель в пробе, N от 2000 до 20 000. Все они подтверждают приведенный вывод.

Для определения распределения дождевых капель по размерам мы не обладаем в настоящее время подобным материалом, набранным из индивидуальных дождей. По материалам 1952 г. возможно было лишь определить суммарные спектры нескольких дождей одной интенсивности. Эти спектры в тех же координатах представлены на рис. 2. Графики рис. 2 показывают, что и для дождевых капель имеет место логарифмически нормальный закон распределения. Так как последний вывод получен только для суммарных спектров, представляет большой интерес собрание статистического материала по спектрам индивидуальных дождей.

Далее, для уточнения вопроса о функции распределения необходимо расширить диапазон улавливаемых капель для

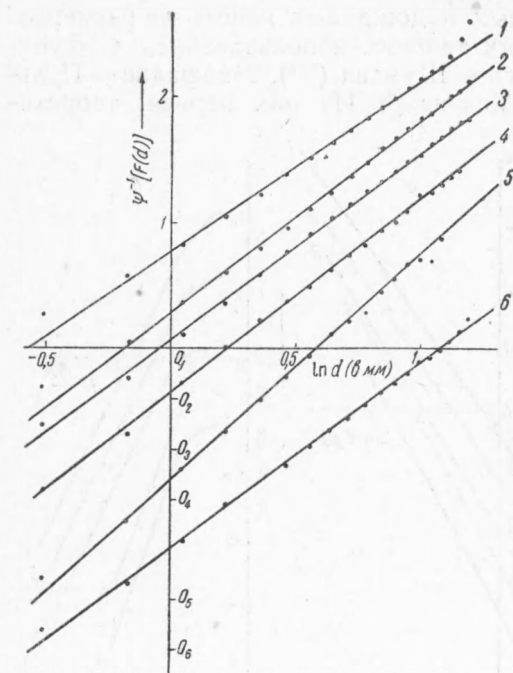


Рис. 2. 1 — $I = 5,6-7,5$ мм/час, $N = 28700$, $\sigma^2 = 0,52$, $d_0 = 0,57$ мм; 2 — $I = 3,6-5,5$ мм/час, $N = 37900$, $\sigma = 0,46$, $d_0 = 0,64$ мм; 3 — $I = 2,6-3,5$ мм/час, $N = 27700$, $\sigma = 0,48$, $d_0 = 0,56$ мм; 4 — $I = 1,6-2,5$ мм/час, $N = 24000$, $\sigma = 0,46$, $d_0 = 0,56$ мм; 5 — $I = 0,5-1,5$ мм/час, $N = 22300$, $\sigma = 0,41$, $d_0 = 0,59$ мм; 6 — $I = 0,5-7,5$ мм/час, $N = 140600$, $\sigma = 0,48$, $d_0 = 0,58$ мм

облаков и дождей. Для облаков существенно было бы наладить методику улавливания мелких капель ($d < 4 \mu$) и методику собирания большого количества крупных капель ($d > 50-60 \mu$). Для дождей желательным было бы проводить улавливание капель, имеющих $d > 400 \mu$.

Нам представляется, что логарифмически нормальный закон распределения облачных капель по размерам в диапазоне диаметров $d = 4-50 \mu$ свидетельствует о наличии коагуляции облачных капель

во всем этом диапазоне. Это обстоятельство косвенным образом подтверждает рабочую гипотезу о наличии коагуляции электрически заряженных облачных капель в диапазоне диаметров $d = 4 \div 30 \mu$, выдвинутую в работе (11).

В работе (7) было показано, что распределение облачных капель по размерам хорошо аппроксимируется формулой

$$n(x) = ax^2 e^{-bx}. \quad (2)$$

Эта формула вытекала из того обстоятельства, что на большом диапазоне диаметров эмпирическая величина $\lg \frac{n(d)}{d^2}$ была линейно связана с d . Однако это последнее соотношение с достаточной точностью имеет место для большого диапазона x в случае логарифмически нормального закона распределения.

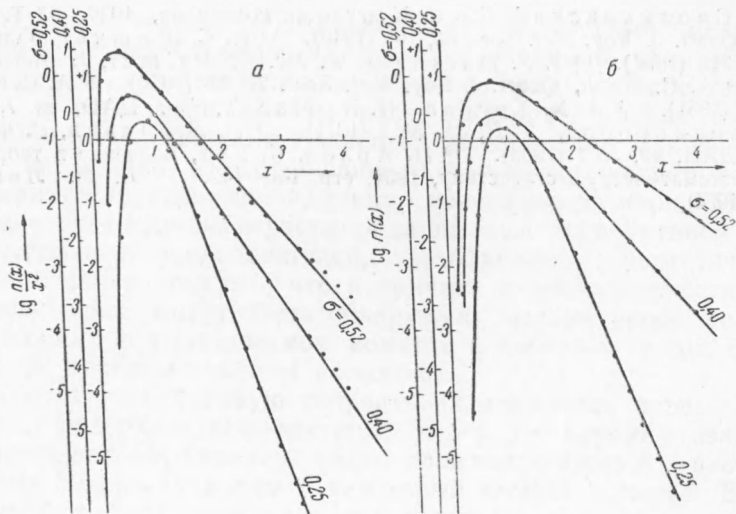


Рис. 3

На рис. 3а изображены графики $\lg \frac{n(x)}{x^2}$, где $n(x)$ задан формулой (1)*. Эти графики показывают, что для диапазона $\sigma = 0,25 \div 0,5$ (т. е. диапазона, практически охватывающего значения σ , встречающиеся в исследованных облаках) достаточно хорошо выполняется зависимость (2) для $x > x_1 = 0,5 \div 1,0 x_0$. При $x < x_1$ имеет место характерное искривление кривой $\lg \frac{n(x)}{x^2}$, которое намечается почти на всех экспериментальных кривых $\lg \frac{n(d)}{d^2}$ (см. рис. 1б), соответствующих распределениям, изображенным на рис. 1а.

Аналогично можно показать, что распределение дождевых капель по размерам, найденное эмпирически Маршаллом и Пальмером (4):

$$n(x) = ae^{-bx}, \quad (3)$$

представляет собой на большом участке аппроксимацию логарифмически нормального закона. Это обстоятельство иллюстрируется рис. 3б, где изображен график $\lg n(x)$ для $n(x)$, заданного формулой (1).

* В качестве единицы масштаба по оси x на рис. 3 принята величина x_0 . Заметим, что x_0 является медианой распределения.

Здесь нужно, кстати, заметить, что полученный нами экспериментальный материал по облачным каплям не удовлетворяет распределению Смолуховского — Шумана, для которого

$$n(x) = ax^2 e^{-bx^3}. \quad (4)$$

Это следует из того, что в координатах рис. 1 б распределение (4) должно было бы изображаться кубической параболой. Как видно из рис. 1 б, последнее обстоятельство не имеет места.

В заключение выражаю сердечную благодарность чл.-корр. АН СССР А. М. Обухову за ценные советы.

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
1 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Смолуховский, Сборн. Коагуляция коллоидов, 1936. ² T. Q. Schumann, Quart. J. Roy. Met. Soc., 66, 195 (1940). ³ Н. С. Шишкин, Усп. физ. наук, 45, в. 3, 313 (1951). ⁴ J. S. Marshall, W. Mc. K. Palmer, J. Meteor., 3, 165 (1948). ⁵ A. C. Best, Quart. J. Roy. Met. Soc., 76, 16 (1950). ⁶ A. C. Best, *ibid.*, 77, 418 (1951). ⁷ А. Х. Хргиан, И. И. Мазин, Тр. ЦАО, в. 7, 56 (1952). ⁸ А. Н. Колмогоров, ДАН, 31, № 2 (1941). ⁹ Л. М. Левин, Р. Ф. Старостина, ДАН, 92, № 1 (1953). ¹⁰ Н. Арлей, К. Бух, Введение в теорию вероятности и математическую статистику, 1951, стр. 140—142. ¹¹ Л. М. Левин, ДАН, 94, № 3 (1954).