Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

МАТЕМАТИКА

О. А. ОЛЕЙНИК

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 I 1954)

Для нелинейных гиперболических уравнений гладкое решение задачи Коши существует, как правило, только в малой окрестности линии или поверхности, где заданы начальные условия. По разрывным начальным условиям решение задачи Коши для нелинейных уравнений, вообще говоря, не определяется однозначно даже в сколь угодно малой окрестности линии или поверхности, где заданы начальные условия. Для того чтобы задача Коши для нелинейных уравнений с гладкими или разрывными начальными условиями была однозначно разрешима в большой области, необходимо рассматривать разрывные решения уравнения и по-новому поставить задачу Коши. Вопрос о такой постановке задачи Коши рассматривается в книге И. Г. Петровского ([1]). К рассмотрению задачи Коши для нелинейных уравнений с разрывными начальными условиями или задачи Коши в большой области приводят задачи механики.

В настоящей заметке мы рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения вида

$$f_1(t, x, u)\frac{\partial u}{\partial t} + f_2(t, x, u)\frac{\partial u}{\partial x} = f_3(t, x, u) \tag{1}$$

с начальным условием на отрезке $[a, b]$ прямой $t=0$ или на всей прямой $t=0$. Уравнение (1) умножением на функцию, зависящую от t, x, u, можно привести к виду

$$\frac{\partial\varphi_1(t, x, u)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2(t, x, u)}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Будем предполагать, что функция $\varphi_1(t, x, u)$ такова, что в уравнении (2) можно произвести замену неизвестной функции вида $\varphi_1(t, x, u) = v$. Поэтому мы ограничимся рассмотрением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(t, x, u)}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ прямой $t=0$ задана функция $u_0(x)$, которая в каждой точке разрыва имеет предел справа $u_0(x+0)$ и предел слева $u_0(x-0)$. Множество точек разрыва функции $u_0(x)$ не более чем счетно. Рассмотрим область G в полуплоскости $t>0$, ограниченную отрезком $[a, b]$ прямой $t=0$ и двумя кривыми, которые являются проекциями на плоскость (t, x) характеристик уравнения (3), проходящих через точки $(0, a, u_0(a+0))$ и $(0, b, u_0(b-0))$. Эти характеристики, как известно, являются решениями системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'_u(t, x, u), \quad \frac{du}{dt} = -\varphi'_x(t, x, u) \tag{4}$$

с начальными условиями $x=a$, $u=u_0(a+0)$ при $t=0$ и $x=b$, $u=u_0(b-0)$ при $t=0$. Будем предполагать, что в области G $\varphi(t, x, u)$ — достаточно гладкая функция переменных t, x, u, определенная для всех u, и $\varphi'_u(t, x, u)$ — монотонно возрастающая функция u для всех точек (t, x) из G. Предположим еще, что любые две точки из G можно единственным образом соединить проекцией характеристики, т. е. интегральной кривой уравнения второго порядка, которое мы получим из системы (4) исключением u.

Обозначим через M множество решений системы (4), проходящих через точки $(0, x, u_0(x))$, где $a \leqslant x \leqslant b$, и точки $(0, \bar{x}, \bar{u}(\bar{x}))$, где $\bar{x}$ — любая точка разрыва функции $u_0(x)$, в которой $u_0(\bar{x}-0) < u_0(\bar{x}+0)$, а $\bar{u}$ — любое число, удовлетворяющее условию $u_0(\bar{x}-0) \leqslant \bar{u} \leqslant u_0(\bar{x}+0)$.

Постановка задачи Коши. *Функцию $u(t, x)$ будем называть решением задачи Коши для уравнения* (3) *в области G с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, если выполнены следующие условия*: 1) *если точка (t_1, x_1) области G является точкой непрерывности функции $u(t, x)$, то характеристика, проходящая через точку $(t_1, x_1, u(t_1, x_1))$, принадлежит множеству M и все точки этой характеристики при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ принадлежат решению $u(t, x)$* (мы говорим, что точка (t', x', u') принадлежит решению $u(t, x)$, если $u' = u(t', x')$ и точка (t', x') является точкой непрерывности $u(t, x)$); 2) *если точка (t_1, x_1) является точкой разрыва функции $u(t, x)$, то найдутся по крайней мере две характеристики из M, проекции которых на плоскость (t, x) проходят через точку (t_1, x_1), и все точки этих характеристик при $t < t_1$ принадлежат решению. Кроме того, равен нулю криволинейный интеграл*

$$\int \varphi(t, x, u(t, x))\, dt - u(t, x)\, dx,$$

взятый по замкнутому контуру, образованному прямой $t=0$ и проекциями любых двух таких характеристик.

При указанных ограничениях на функции $\varphi(t, x, u)$ и $u_0(x)$ существует в области G единственное решение $u(t, x)$ задачи Коши для уравнения (3) *с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$.*

Доказательство существования решения задачи Коши. Построим функцию $U(t, t_1, x_1, \xi)$ следующим образом: соединим точку (t_1, x_1) и $(0, \xi)$ проекцией характеристики уравнений (3) и по значениям dx/dt вдоль этой кривой определим $U(t, t_1, x_1, \xi)$ из равенства $dx/dt = \varphi(t, x(t), U)$. Функция $U(t, t_1, x_1, \xi)$ является непрерывной функцией своих аргументов. Рассмотрим функцию

$$I(t, x, s) = \int_a^s [u_0(\xi) - U(0, t, x, \xi)]\, d\xi,$$

где (t, x) — любая точка области G, $a \leqslant s \leqslant b$. Легко видеть, что для каждой точки (t, x) из G $I(t, x, s)$, как функция s, принимает наименьшее значение во внутренних точках отрезка $[a, b]$. Это следует из того, что $u_0(a+0) - U(0, t, x, a) < 0$ и $u_0(b-0) - U(0, t, x, b) > 0$ в силу наших предположений относительно $\varphi(t, x, u)$. Обозначим через $s_+(t, x)$ верхнюю грань, а через $s_-(t, x)$ нижнюю грань множества, на котором $I(t, x, s)$, как функция s, принимает наименьшее значение. Решение задачи Коши уравнения (3) с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$ в области G во всех точках непрерывности определяется функцией $u(t, x) = U(t, t, x, s_+(t, x))$. Это утверждение вытекает из следующих вспомогательных предложений:

Лемма 1. *Если $x < x_1$, то $s_+(t, x) \leqslant s_-(t, x_1)$.*

Лемма 2. *В каждой точке* (t_1, x_1) *области* G *имеют место соотношения*:

$$\varlimsup_{(t,x)\to(t_1,x_1)} s_-(t, x) = s_-(t_1, x_1), \qquad \varlimsup_{(t,x)\to(t_1,x_1)} s_+(t, x) = s_+(t_1, x_1),$$

$$s_-(t_1, x_1 - 0) = s_-(t_1, x_1), \qquad s_+(t_1, x_1 + 0) = s_+(t_1, x_1).$$

Лемма 3. *Пусть* $I(t_0, x_0, s_0) = I(t_0, x_0, s_+(t_0, x_0))$, $(t_0, x_0) \subset G$. *Тогда во всех точках* (t_1, x_1) *проекции характеристики* (4) *соединяющей точку* (t_0, x_0) *и* $(0, s_0)$, *имеют место равенства*

$$s_-(t_1, x_1) = s_+(t_1, x_1) = s_0.$$

Лемма 4. *Имеет место тождество*

$$I(t_1, x_1, s) = \int_a^s u_0(\xi)\,d\xi + \int_s^{x_1} U(t, t_1, x_1, s)\,dx - \int_0^{t_1} \varphi(t, x, U(t, t_1, x_1, s))\,dt + F,$$

где F — *некоторая функция, зависящая только от* t_1 *и* x_1; $x = x(t)$ — *проекция характеристики, соединяющая* (t_1, x_1) *и* $(0, s)$.

Пользуясь этими леммами, легко убедиться, что функция $u(t, x)$ является решением задачи Коши. Действительно, точка (t_1, x_1), где $s_+(t_1, x_1) = s_-(t_1, x_1)$, является точкой непрерывности $u(t, x)$, и характеристика, проходящая через точку $(t_1, x_1, u(t_1, x_1))$, принадлежит M, так как $U(0, t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)) = u_0(s_+(t_1, x_1))$, если $s_+(t_1, x_1)$ является точкой непрерывности функции $u_0(s)$, или $U(0, t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)) = \bar{u}$, где $u_0(s_+(t_1, x_1) - 0) \leqslant \bar{u} \leqslant u_0(s_+(t_1, x_1) + 0)$, если $s_+(t_1, x_1)$ есть точка разрыва $u_0(s)$. Из леммы 3 следует, что все точки характеристики, проходящей через точку $(t_1, x_1, u(t_1, x_1))$, для которых $t < t_1$, принадлежат решению $u(t, x)$. Если в точке (t_1, x_1) из G $s_-(t_1, x_1) \neq s_+(t_1, x_1)$, то она является точкой разрыва функции $u(t, x)$. Характеристики, проходящие через точки $(0, s_+(t_1, x_1), U(0, t_1, x_1, s_+(t_1, x_1)))$ и $(0, s_-(t_1, x_1), U(0, t_1, x_1, s_-(t_1, x_1)))$, принадлежат множеству M, и их точки при $t < t_1$ принадлежат решению $u(t, x)$. Из леммы 4 следует обращение в нуль интегралов, указанных в условии 2) при постановке задачи Коши.

Некоторые свойства решения задачи Коши. 1) *Точки разрыва решения* $u(t, x)$ *расположены на линиях; координата* x *точек такой линии является однозначной и непрерывной функцией* t. *Множество линий разрыва функции* $u(t, x)$ *не более чем счетно.*

Действительно, линия разрыва, проходящая через точку (t_1, x_1), однозначно определяется для значений $t_1 \leqslant t < T_1$, где T_1 — верхняя грань значений t' таких, что на прямой $t = t'$ существуют точки, для которых $s_- \geqslant s_+(t_1, x_1)$, а также точки, для которых $s_+ \leqslant s_-(t_1, x_1)$. На прямой $t = t'$ $(t_1 < t' < T_1)$ существует единственная точка (t', x') такая, что отрезок $[s_-(t', x'), s_+(t', x')]$ содержит внутри себя отрезок $[s_-(t_1, x_1), s_+(t_1, x_1)]$. Множество таких точек на прямых $t = t'$ образует непрерывную линию $x' = x(t')$, проходящую через точку (t_1, x_1). Все точки этой линии являются точками разрыва $u(t, x)$. Так как на каждой прямой $t = \text{const}$ в силу леммы 1 множество точек разрыва не более чем счетно и координаты x двух линий разрыва отличаются между собой хотя бы при одном рациональном значении t, то множество всех линий разрыва решения $u(t, x)$ не более чем счетно.

2) *В каждой точке разрыва решения* $u(t, x)$ *существуют пределы* $u(t, x - 0)$ *и* $u(t, x + 0)$.

3) *Пусть* $x = x(t)$ — *уравнение какой-либо линии разрыва решения* $u(t, x)$. *Для каждой точки* $(t, x(t))$ *на линии разрыва имеет место соотношение*

$$\lim_{\substack{t_1 \to t \\ t_1 > t}} \frac{x(t_1) - x(t)}{t_1 - t} = \frac{\varphi(t, x(t), u(t, x-0)) - \varphi(t, x(t), u(t, x+0))}{u(t, x-0) - u(t, x+0)}.$$

Единственность решения задачи Коши. Покажем, что всякое решение $u(t, x)$ поставленной выше задачи Коши для уравнения (3) во всех точках непрерывности совпадает с функцией $U(t, t, x, s_+(t, x))$. Действительно, если это не так, то найдется такое множество E точек непрерывности решения $u(x, t)$, что характеристика, проходящая через точку $(t, x, u(t, x))$, не совпадает с характеристикой, проходящей через точку $(0, s_+(t, x), U(0, t, x, s_+(t, x)))$, и мощность множества точек $(0, s_+(t, x), U(0, t, x, s_+(t, x)))$, если $(t, x) \subset E$, равна континууму.

Пусть $\bar{t}$ — верхняя грань значений t для точек, которые принадлежат решению $u(t, x)$, являются точками непрерывности $u(t, x)$ и лежат на характеристике, проходящей через точку $(0, s_+(t, x), U(0, t, x, s_+(t, x)))$. Точка $(\bar{t}, x(\bar{t}))$ проекции этой характеристики на плоскость (t, x) не может быть точкой разрыва решения $u(t, x)$, так как для нее не могут обращаться в нуль все интегралы, указанные в условии 2, в силу лемм 3 и 4. Если же эта точка является точкой непрерывности функции $u(t, x)$, то легко показать, что она должна быть началом линии разрыва, но это противоречит тому, что множество линий разрыва не более чем счетно, а мощность множества точек такого рода равна континууму.

Зависимость решения $u(t, x)$ от начальной функции $u_0(x)$. Пусть $u_0^n(x)$ сходятся равномерно на $[a, b]$ к функции $u_0(x)$ при $n \to \infty$. Тогда в каждой точке непрерывности решения $u(t, x)$ задачи Коши с начальной функцией $u_0(x)$ имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} u^n(t, x+0) = u(t, x),$$

где $u^n(t, x)$ — решение задачи Коши с начальным условием $u^n(0, x) = u_0^n(x)$.

Это легко доказать, пользуясь тем, что $u(t, x) = U(t, t, x, s_+(t, x))$.

Замечания. 1. Если начальная функция $u_0(x)$ задана и ограничена на всей прямой $t = 0$, то решение задачи Коши в полуплоскости $t > 0$ может быть получено так же, как и для области G. При этом функция $\varphi(t, x, u)$ должна быть такой, чтобы $\lim\limits_{s\to\pm\infty} I(t, x, s) = +\infty$ для всех точек (t, x) полуплоскости $t > 0$. Можно легко указать для этого ряд достаточных условий на функцию $\varphi(t, x, u)$.

2. Для специального уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ решение задачи Коши в указанной постановке было получено в работе [2] и для некоторых частных случаев функции $u_0(x)$ — в работе [3] путем предельного перехода из решений уравнения $\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$ при стремлении ε к нулю. Полученные выше решения задачи Коши для уравнения (2) можно также получить при некоторых ограничениях на φ_1 и φ_2 как предел решений уравнения $\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\varphi_1(t, x, u)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2(t, x, u)}{\partial x}$ при стремлении ε к нулю.

3. Полученное решение задачи Коши уравнения (1) зависит от представления уравнения (1) в виде (2). Эту зависимость легко видеть из свойства 3) полученного решения.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, 1953, стр. 139—142. [2] E. Hopf, Comm. on Pure and Appl. Math., 3, No. 201 (1950). [3] I. D. Cole, Quart. Appl. Math., 9, No. 3, 225 (1951).