Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ

О ДУГЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 I 1954)

Центральная кривая 2-го порядка определяется уравнением

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0 \tag{1}$$

или

$$Ax^2 - By^2 - Cz^2 = 0, \tag{2}$$

где можно полагать $A < B$. При этом (1) в случае $C/B < C/A < k^2$ дает реальный эллипс, в случае $C/B < k^2 < C/A$ полуреальный, в случае $k^2 < C/B < C/A$ идеальный. Уравнение (2) в случае $C/A < k^2$ дает реальную гиперболу, в случае $k^2 < C/A$ — идеальную.

В первом случае уравнение (1) и связующее x, y, z соотношение

$$x^2 + y^2 - k^2 z^2 = -k^2 \tag{3}$$

приводим к двум уравнениям:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{\lambda^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \tag{4}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{k^2 C}{Ak^2 - C}$, $\beta^2 = \dfrac{k^2 C}{Bk^2 - C}$, $\gamma^2 = \dfrac{k^2 A}{Bk^2 - C}$, $\lambda = \dfrac{C}{B}\,\dfrac{B-A}{Ak^2 - C}$.

Уравнение (4) можем заменить следующими:

$$x = \alpha \operatorname{sn} t, \quad y = \beta \operatorname{cn} t, \quad z = \gamma \operatorname{dn} t, \tag{5}$$

считая λ за модуль этих эллиптических функций.

Дуга выражается интегралом $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 - k^2 a z^2}$ и, на основании (4), интегралом $s = \int \sqrt{\alpha^2 \operatorname{cn}^2 t \operatorname{dn}^2 t + \beta^2 \operatorname{sn}^2 t \operatorname{dn}^2 t - \lambda^4 \gamma^2 \operatorname{sn}^2 t \operatorname{cn}^2 t}\, dt$. Этот интеграл приводится к ультраэллиптическому интегралу 2-го класса $s = \int \dfrac{S + T\eta + U\eta^2}{\sqrt{R(\eta)}}\, d\eta$, где $R(\eta) = (U\eta^2 + T\eta + S)(1-\eta)(1-k^2\eta)\,\eta$.

В случае евклидовой плоскости мы можем указать спрямляемую разность $s_2 - s_1$ дуг эллипса. Для плоскости Лобачевского можем указать сумму $s_2 + s_3$ такую, что $s_2 + s_3 - s_1$ спрямляема. Вообще, для решения этой задачи мы должны использовать теорему Абеля. Полагая $\eta = 1/\eta_1$, мы можем пересечь кривую

$$\zeta_1^2 = Q_1(\eta_1), \tag{6}$$

где $Q_1(\eta_1) = (S\eta_1^2 + T\eta_1 + U)(\eta_1 - 1)(\eta_1 - k^2)\,\eta_1^2$, параболой, определяемой уравнением

$$\zeta_1 = \delta + \gamma\eta_1 + \beta\eta_1^2 + \alpha\eta_1^3, \tag{7}$$

в котором $\delta^2 = Q_1(0)$, $2\delta\gamma = Q_1'(0)$. Исключая (α, β) из следующих уравнений, которые получаем из (6) и (7):

$$\sum \eta_1^{(j)} = \varphi_1(\alpha, \beta); \quad \sum \eta_1^{(j)} \eta_1^{(k)} = \varphi_2(\alpha, \beta); \quad \sum \eta_1^{(j)} \eta_1^{(k)} \eta_1^{(l)} = \varphi_3(\alpha, \beta);$$
$$\eta_1^{(1)} \eta_1^{(2)} \eta_1^{(3)} \eta_1^{(4)} = \varphi_4(\alpha, \beta),$$

где $\eta_1^{(j)}$ — корни иные, чем 0, мы получаем выражения $\eta_1^{(3)}$, $\eta_1^{(4)}$ через $\eta_1^{(1)}$, $\eta_1^{(2)}$, а затем $\eta^{(3)}$, $\eta^{(4)}$ через $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$, при которых $\eta^j =$ сумме $\sum_{\nu=1}^{\nu=4} \int_{\eta^{(0j)}}^{\eta^{(j)}} \frac{S + T\eta + U\eta^2}{Q(\eta)} d\eta$, где $\eta^{(0j)}$ — координаты точек пересечения, отвечающие специально выбранным значениям α, β — выражаются алгебраической функцией $\eta^{(j)}$.

Если положить $\eta^{(4)} = \eta^{(04)}$, то получим алгебраические выражения $\eta^{(3)}$, $\eta^{(2)}$ через $\eta^{(1)}$ и будем иметь $s_2 + s_3 = s_1 +$ алгебраическая функция, причем начальные и конечные точки s_2, s_3 получаются из начальной и конечной точки s_1, алгебраическим построением (построением при помощи алгебраических кривых).

Следует отметить, что большие выкладки, которые требует теорема Абеля, можно обойти, используя интегралы якобиевских уравнений:

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{\eta_1^{(0j)}}^{\eta_1^{(3)}} \frac{d\eta_1}{\sqrt{Q_1(\eta_1)}} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{3} \int_{\eta_1^{(0j)}}^{\eta_1^{(3)}} \frac{\eta_1 d\eta_1}{\sqrt{Q_1(\eta_1)}} = 0; \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{Q_1(\eta_1^{(j)})}{F'(\eta_1^{(j)})} = \sqrt{a_6 p_1^2 + a_5 p + C}, \tag{9}$$

где

$$Q_1(\eta_1) = a_0 \eta_1^6 + a_1 \eta_1^5 + a_2 \eta_1^4 + a_3 \eta_1^3 + a_4 \eta_1^2 + a_5 \eta_1 + a_6;$$
$$F(\eta_1) = (\eta_1 - \eta_1^{(1)})(\eta_1 - \eta_1^{(2)})(\eta_1 - \eta_1^{(3)});$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{Q_1(\eta_1^{(j)})}{F'(\eta_1^{(j)})(\eta_1^{(j)})^2} = \frac{\sqrt{a_0 p_2^2 + a_1 p_2 p_3 + C' p_3^2}}{p_3^2}, \tag{10}$$

$p_2 = \sum \eta_1^{(j)} \eta_1^{(k)}$, $p_3 = \eta_1^{(1)} \eta_1^{(2)} \eta_1^{(3)}$, $\eta_1 = 1/\eta$. Для получения искомых зависимостей следует только в (9) и (10) положить $\eta_1 = 1/\eta$.

Такие же исследования возможны и для полуреального эллипса, для которого уравнение (4) заменяется следующими:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\lambda'^2 \alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \tag{11}$$

или

$$x = \alpha \frac{\operatorname{dn} t}{\operatorname{cn} t}, \quad y = \beta\lambda' \frac{\operatorname{sn} t}{\operatorname{cn} t}, \quad z = \gamma \frac{\lambda}{\lambda'} \frac{1}{\operatorname{cn} t}. \tag{12}$$

В случае реальной гиперболы

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\lambda^2 \beta^2} = 1, \qquad \frac{\lambda'^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{\lambda'^2 z^2}{\gamma^2} = 1 \tag{13}$$

или

$$x = \alpha \frac{\operatorname{dn} t}{\lambda'}, \quad y = \frac{\beta\lambda \operatorname{cn} t}{\lambda'}, \quad z = \gamma\lambda \operatorname{sn} t. \tag{14}$$

Дальнейшее исследование приводит тоже к интегралам 1-го класса.

Поступило
11 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Laurent, Traité d'Analyse, 4, p. 322, 1889. [2] Д. Мордухай-Болтовской, Изв. Донск. политехн. инст. (1905—1906). [3] Barbarin, Etude de géométrie analytique non Euclidienne, Bruxelle, 1900.