Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

МАТЕМАТИКА

М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 21 I 1954)

1. Пусть дана система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \varepsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

и пусть

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2'}$$

Покажем, что

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{\Delta}\sqrt{\sum \varepsilon_i^2},$$

где числа $x_1, \ldots, x_n$ — решение, а Δ — определитель системы (1).

Очевидно, что

$$\lambda\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2},$$

где λ — модуль наименьшего собственного значения матрицы $\| a_{ij} \|$.

Оценим теперь число λ снизу, пользуясь условием (2). Так как собственные числа матрицы при транспонировании не меняются, то та же оценка получится, если использовать условие (2').

Пользуясь известным из линейной алгебры равенством

$$A = HU,$$

где A — произвольная матрица, H — самосопряженная матрица и U — унитарная матрица, можно показать, что достаточно оценить число λ снизу лишь для самосопряженной матрицы.

Используя равенство (2) для самосопряженной матрицы, можно показать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = n, \tag{3}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа самосопряженной матрицы. Пусть $\lambda_1 = \lambda$ — наименьшее собственное число матрицы.

Так как определитель матрицы Δ равен

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

то, очевидно, определитель Δ достигнет при фиксированном λ_1 наибольшего по модулю значения, если

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n.$$

В этом случае из условия (3) следует

$$\lambda_i^2 = \frac{n - \lambda_1^2}{n-1} \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Значит,

$$\Delta \leqslant \lambda \left(1 + \frac{1-\lambda^2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < \lambda e^{\frac{1-\lambda^2}{2}} < \lambda \sqrt{e},$$

откуда

$$\lambda > \frac{\Delta}{\sqrt{e}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} < \frac{\sqrt{e}}{\Delta} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}, \tag{4}$$

что и требовалось показать.

2. Из неравенства (4) следует, что для системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

если b_i известно с точностью до ε_i, $i = 1, \ldots, n$, то при нормировке системы (2) или (2′) x_i известно с точностью до $\frac{\sqrt{e}}{\Delta} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}$.

Эта оценка для нормировки (2′) существенно улучшена быть не может. Она была приведена в нашей заметке [1] для случая, когда

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n.$$

Для нормировки (2) непосредственным применением неравенства Адамара можно получить для искомой точности выражение

$$\frac{1}{\Delta} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}.$$

Поступило
2 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Лаврентьев, ДАН, **92**, 885 (1953).