Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

МАТЕМАТИКА

В. Г. КАРМАНОВ

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 I 1954)

Цель заметки — доказать существование решения одной граничной задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

и обосновать применение конечноразностного метода для решения этой задачи.

§ 1. Рассмотрим на плоскости x, y m-связную область G, ограниченную в верхней полуплоскости непрерывными линиями $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ с концами в соответствующих точках оси Ox: $A_1, B_1; A_2, B_2; \ldots; A_m, B_m$. Предполагается, что все открытые отрезки (A_iB_i) $(i = 2, 3, \ldots, m)$ не перекрываются и принадлежат отрезку $[A_1B_1]$. В нижней полуплоскости область G ограничена отрезками $[A_iC_i]$ и $[B_iC_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ характеристик $y = A_i - x$ и $y = x - B_i$; C_i — точка пересечения этих характеристик.

Постановка задачи T^*. *Требуется найти такую функцию $u(x, y)$, что: 1°) и является решением уравнения (1) в области G при $y \neq 0$; 2°) и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$; 3°) $\partial u / \partial x$ и $\partial u / \partial y$ непрерывны внутри G; если они обращаются в бесконечность в точках A_i и B_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то порядка ниже единицы; 4°) на линиях γ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и на характеристиках $[A_1C_1]$ и $[B_iC_i]$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$ и принимает заданные значения:*

$$u|_{\gamma_i} = f_i, \quad u|_{[A_1C_1]} = \psi_1, \quad u|_{[B_iC_i]} = \psi_i,$$

причем f_i непрерывны, а ψ_i дважды дифференцируемы.

Метод решения. Проведем в верхней полуплоскости через точки A_1 и B_1 гладкую линию Жордана γ таким образом, чтобы замкнутой односвязной области $\overline{G'}$, границей которой является контур $\gamma + [A_1C_1] + [B_1C_1]$, принадлежала замкнутая область $\overline{G}$. Пусть f — произвольная непрерывная на γ функция. В работе А. В. Бицадзе [1] доказывается, что в области G' существует единственная функция $v(x, y)$, являющаяся решением следующей задачи.

Задача T. 1') v удовлетворяет уравнению (1) в области G' при $y \neq 0$; 2') непрерывна в замкнутой области $\overline{G'}$; 3') $\partial v / \partial x$ и $\partial v / \partial y$ непрерывны внутри G'; если они обращаются в бесконечность в точках A_1 и B_1, то порядка ниже единицы; 4') на γ и на $[A_1C_1]$ v принимает заданные значения

$$v|_{\gamma} = f, \quad v|_{[A_1C_1]} = \psi_1.$$

Если мы построим функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую в области G условиям 1°), 2°), 3°) задачи T^* и условию 4°)

$$w|_{\gamma_i} = F_i \ (i = 1, 2, \ldots, m), \quad w|_{[A_1C_1]} = 0, \quad w|_{[B_iC_i]} = \Psi_i \ (i = 2, 3, \ldots, m)$$

(где F_i — непрерывные функции, а Ψ_i — дважды дифференцируемые функции, например, $F_i = v|_{\gamma_i} - f_i$ и $\Psi_i = v|_{[B_iC_i]} - \psi_i$), то функция $u = v - w$ будет решением задачи T^*.

Нетрудно видеть, что функция $w(x, y)$ в гиперболической части G_2 области G представляет собой цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны характеристике $y = -x$. Поэтому достаточно решить следующую задачу T^{**}.

Пусть G^0 — односвязная область с той же границей $\Gamma = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i$ в верхней полуплоскости, что и у области G; в нижней полуплоскости область G^0 ограничена отрезками характеристик $[A_1E_1]$, $[A_2E_1]$; $[B_iE_i]$, $[A_{i+1}E_i]$ $(i = 2, 3, \ldots, m-1)$; $[B_mE_m]$, $[B_1E_m]$. При этом $[A_1E_1]$ и $[B_iE_i]$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$ параллельны характеристике $y = -x$, а остальные отрезки параллельны характеристике $y = x$. E_i — соответствующие точки пересечения.

З а д а ч а T^{**}. Требуется найти функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую в области G^0 условиям 1°), 2°), 3°) и условию 4°)

$$w|_{\gamma_i} = F_i \ (i = 1, 2, \ldots, m), \quad w|_{[A_1E_1]} = 0,$$

$$w|_{[B_iE_i]} = F_i(B_i) \ (i = 2, 3, \ldots, m), \quad F_1(A_1) = 0.$$

Функцию $w(x, y)$ будем строить, пользуясь конечноразностным методом, как это делает И. Г. Петровский ([2]).

Рассмотрим сетку S_h. Внутри эллиптической части G_1^0 области G^0 и внутри перехода $L = [A_1A_2] + \sum_{i=2}^{m-1} [B_iA_{i+1}] + [B_mB_1]$ это обычная квадратная сетка, образованная прямыми $x = kh$, $y = lh$ $(h > 0,\ l = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Внутри гиперболической части G_2^0 области G^0 узловые точки $(x, y)_h$ сетки S_h лежат на пересечении характеристик $y = kh - x$, $y = x - lh$ $(k, l = 1, 2, 3, \ldots)$.

Введем обозначения: $\overline{G}{}_{1h}^0$ — область, состоящая из квадратов, целиком принадлежащих $G_1^0 + \Gamma + L$; $\overline{G}{}_{2h}^0$ — область, ограниченная соответствующими отрезками перехода L и отрезками характеристик, проходящих через ближайшие к точкам A_i и B_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ граничные точки области $\overline{G}{}_{1h}^0$, лежащие на оси Ox; Γ_h — совокупность таких квадратов, принадлежащих $\overline{G}{}_{1h}^0$, у которых хотя бы одна из вершин лежит на границе области $\overline{G}{}_{1h}^0$, исключая те квадраты, нижние основания которых лежат на L, а боковые стороны не принадлежат границе области $\overline{G}{}_{1h}^0$; F_{ih} — функции, заданные в каждом узле из Γ_h значениями F_i в одной из точек границы Γ, ближайших к этому узлу.

Определим в узловых точках $(x, y)_h \in \overline{G}{}_{1h}^0 + \overline{G}{}_{2h}^0$ функцию w_h как решение следующей системы разностных уравнений:

$$\begin{aligned} &\Delta_h w_h = \frac{1}{h^2} [w_h(x+h, y) + w_h(x-h, y) + w_h(x, y+h) + \\ &+ w_h(x, y-h) - 4w_h(x, y)] = 0 \qquad \text{при } y > 0 \text{ и } (x, y)_h \in \overline{G}{}_{1h}^0 - \Gamma_h; \\ &\Delta_\gamma w_h + l_h w_h = 0 \qquad \text{при } y = 0 \text{ и } (x, y)_h \in G_{1h}^0 - \Gamma_h; \end{aligned} \qquad (2)$$

$$
\begin{aligned}
l_h w_h = \frac{1}{h^2}\,[w_h(x-h, y) - w_h(x, y-h)] = 0 \quad &\text{при } (x,y)_h \in G^0_{2h}; \\
w_h = F_{lh} \quad &\text{при } (x, y)_h \in \Gamma_h.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Теорема 1. *Функция w_h принимает наибольшее и наименьшее значения в точках $(x, y)_h \in \Gamma_h$.*

Из теоремы 1 вытекает единственность решения w_h системы уравнений (2), (3).

Пусть $h_n = \frac{B_1 - A_1}{2^n}$, $w_{h_n} = w^n$, $w^n_x = \frac{w^n(x+h_n, y) - w^n(x, y)}{h_n}$,

$$w^n_y = \frac{w^n(x, y+h_n) - w^n(x, y)}{h_n}.$$

Приводимые ниже теоремы полностью решают вопрос о построении решения w задачи T^{**}.

Рассмотрим область G^*, принадлежащую целиком вместе со своей границей области G^0.

Теорема 2. *Из равномерной ограниченности семейства $\{w^n\}$ решений уравнений (2), (3) следует равномерная ограниченность семейств разностных отношений $\{w^n_x\}$ и $\{w^n_y\}$ на множестве узловых точек $(x, y)_h$, принадлежащих всякой области G^*.*

Так как w^n_x и w^n_y являются также решениями системы уравнений (2), то из теоремы 2 следует равномерная ограниченность семейств $\{w^n_{xx}\}$ и $\{w^n_{yy}\}$. То же самое относится и к семействам $\{w^n_{xxx}\}$ и $\{w^n_{yyy}\}$.

Для доказательства теоремы следует воспользоваться приемом С. Н. Бернштейна (см. [2]).

Теорема 3. *Функции w^n, w^n_x, w^n_y, w^n_{xx} и w^n_{yy} можно так доопределить во всей области G^0, что полученные семейства функций $\{w^n\}$, $\{w^n_x\}$, $\{w^n_y\}$, $\{w^n_{xx}\}$, $\{w^n_{yy}\}$ будут равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в G^*.*

Из теоремы Арцеля следует:

Теорема 4. *Из семейства функций $\{w^n\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{w^{n_k}\}$, которая сходилась бы в G^0 (равномерно в G^*) к некоторой функции w, а последовательности первых и вторых разностных отношений от w^{n_k} сходились в G^0 (равномерно в G^*), соответственно, к $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.*

Предельным переходом в системе уравнений (2) при $h_n \to 0$ доказывается

Теорема 5. *Функция $w(x, y)$ удовлетворяет в G^0 при $y \neq 0$ уравнению* (1).

При помощи барьеров доказывается

Теорема 6. *Функция $w(x, y)$ непрерывна в $G^0 + \Gamma$ и принимает во всех регулярных в смысле Перрона точках Q границы Γ заданные значения F_l.*

Из условий склеивания следует, что для решения w задачи T^{**} на переходе L выполняется равенство

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

а из свойств гармонических функций следует, что w не может достигать экстремума внутри $G^0_1 + L$. Поэтому решение задачи T^{**} единственно. При помощи этого доказывается

Теорема 7. *Не только подпоследовательность $\{w^{n_k}\}$, но и вся последовательность $\{w^n\}$ сходится к w.*

Замечание к § 1. В задаче T^* можно не требовать непрерывности функций f_l. Для существования решения достаточна ограниченность всех f_l на Γ (условия 2°) и 4°) в этом случае соответствующим образом изменятся).

§ 2. Пусть $v(x, y)$ — точное решение задачи T. Построив для области G' по заданному $\varepsilon > 0$ совокупность квадратов γ_ε (совершенно так же, как строилась совокупность квадратов Γ_h в задаче T^{**}) и определив в узлах $(x, y)_h \in \gamma_\varepsilon$ функцию f_h (таким же образом, как и в задаче T^{**}), зададим в точках $(x, y)_h \in \overline{G}'_{1h} + \overline{G}'_{2h}$ функцию v_h как решение следующей системы разностных уравнений*:

$$h^2 \Delta_h v_h = 0 \qquad \text{при } y > 0 \text{ и } (x, y)_h \in \overline{G}'_{1h} - \gamma_\varepsilon;$$

$$h^2(\Delta_h v_h + l_h v_h) = \psi_1\left(\frac{x-h}{2}\right) - \psi_1\left(\frac{x+h}{2}\right) \qquad \text{при } (x, 0)_h \in \overline{G}'_{1h} - \gamma_\varepsilon; \tag{4}$$

$$v_h(x, y) - v_h(x+y, 0) = \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\text{при } \quad y < 0 \text{ и } (x, y)_h \in \overline{G}'_{2h};$$

$$v_h = f_h \qquad \text{при } (x, y)_h \in \gamma_\varepsilon.$$

Подобно тому как это делает И. Г. Петровский в [3] (стр. 276—283), доказывается следующая

Теорема. *Пусть в задаче T граничная функция ψ_1 трижды дифференцируема и третьи производные ее удовлетворяют условиям Гёльдера с показателем $0 < \lambda \leqslant 1$. Если $v(x, y)$ — точное решение задачи T, а $v_h(x, y)$ — решение системы (4), то для всякого $\delta > 0$ найдется такое достаточно малое $\varepsilon > 0$ и такое достаточно малое $h > 0$, что для всех точек $(x, y)_h \in \overline{G}'_{1h} + \overline{G}'_{2h}$*

$$|v(x, y) - v_h(x, y)| \leqslant \delta.$$

Эта теорема и результаты § 1 полностью обосновывают применение конечноразностного метода для решения задачи T^*.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 12 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 41 (1953). [2] И. Г. Петровский, Усп. матем. наук, 8, стр. 161 (1941). [3] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, М.— Л., 1950. [4] З. И. Халилов, Докл. АН Азерб.ССР, 9, № 4 (1953).

---

* Через $\overline{G}'_{1h}$ и $\overline{G}'_{2h}$ обозначены области, определение которых аналогично определению областей $\overline{G}^0_{1h}$ и G^0_{2h} в задаче T^{**}.