Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. А. ГУБАРЬ

ХАРАКТЕРИСТИКА СЛОЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ГРУБЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК БЛИЗКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком П. С. Александровым 25 I 1954)

В настоящей заметке рассматривается зависимость между топологической структурой расположения траекторий в окрестности сложной особой точки системы двух дифференциальных уравнений и числом и характером простых (грубых — см. ([1])) особых точек, на которые изучаемая сложная особая точка может расщепляться при малых изменениях системы. Такой подход к изучению сложных особых точек естественно возникает из круга идей А. А. Андронова, относящихся к изучению системы дифференциальных уравнений путем рассмотрения систем, близких к исходной.

Мы ограничиваемся при этом рассмотрением только таких систем дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad \frac{dx}{dt} = P(x, y), \tag{1}$$

в которых $Q(x, y)$ и $P(x, y)$ являются функциями, аналитическими в некоторой области G и не имеющими общего делителя. Относительно изучаемых сложных особых точек предполагается, что в них

$$|P'_x| + |P'_y| + |Q'_x| + |Q'_y| \neq 0. \tag{2}$$

Рассмотрим близкую к системе (1) систему

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y), \quad \frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y). \tag{1'}$$

Если $p(x, y)$ и $q(x, y)$ являются аналитическими функциями, причем значения этих функций, а также значения всех их частных производных до порядка r включительно по абсолютной величине не превосходят числа $\varepsilon > 0$ в области G, то мы будем называть функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ ε-добавками ранга r.

Определение. Особая точка $O(x_0, y_0)$ называется m-кратной, если: а) существуют такие $\delta_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что при всех ε_0-добавках ранга m у системы (1′) в δ_0-окрестности точки O может быть не больше чем m особых точек; б) при любом $\delta < \delta_0$ и любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ всегда существуют такие ε-добавки ранга m, при которых система (1′) имеет в δ-окрестности точки O m грубых особых точек.

Обозначим через N_f, N и C числа, соответственно, замкнутых узловых, открытых узловых и седловых областей, примыкающих к особой точке. Из результатов Бендиксона ([2]) следует, что топологическая структура расположения траекторий в достаточно малой окрестности особой точки системы (1), удовлетворяющей условию (2), полностью определяется числами N_f, N и C.

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x, y) & P'_y(x, y) \\ Q'_x(x, y) & Q'_y(x, y) \end{vmatrix}; \quad \delta = P'_x(x, y) + Q'_y(x, y). \tag{3}$$

А. Случай $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$. Бендиксон показал ([2]), что в этом случае особая точка O может быть седлом ($C = 4$, $N_f = 0$, $N = 0$); узлом ($C = 0$, $N_f = 0$, $N = 1$ и все траектории входят в особую точку O с определенной касательной) и простейшим седло-узлом ($C = 2$, $N = 1$, $N_f = 0$).

Будем называть допустимыми такие ε_0-добавки ранга $r \geqslant m$, при которых система (1′) имеет в δ-окрестности точки O только грубые особые точки (под ε_0, δ_0 и m здесь подразумеваются числа, указанные выше в определении). Числа ε_0 и δ_0 можно взять настолько малыми, чтобы система (1′) не имела фокусов в δ_0-окрестности точки O.

Теорема 1. *Особая точка O системы* (1) *является узлом* (*седлом*), *если при всех допустимых ε_0-добавках число грубых узлов* (*седел*) *системы* (1′), *расположенных в δ_0-окрестности точки O, на единицу больше числа грубых седел* (*узлов*). *Особая точка O является седло-узлом, если число грубых седел системы* (1′) *равно числу грубых узлов.*

Для доказательства этой теоремы система (1) приводится к виду

$$\frac{dy}{dt} = y + Q_2(x, y), \quad \frac{dx}{dt} = P_2(x, y),$$

где Q_2 и P_2 — аналитические функции, разложения которых по степеням x и y не содержат линейных членов. Далее рассматривается функция $\psi(x) = P_2(x, \varphi(x))$, где $\varphi(x)$ есть решение уравнения $y + Q_2(x, y) = 0$.

Всегда можно взять $\varepsilon > 0$ таким, что при всех допустимых ε-добавках особые точки системы (1′), находящиеся в δ_0-окрестности точки O, будут расположены на кривой $y = \varphi(x)$. Легко показать, что если разложение функции $\psi(x)$ по степеням x имеет вид: $\psi(x) = \Delta_m x^m + \ldots$, то m является кратностью точки O, а знак числа Δ_m (в случае m нечетного) определяет, будут ли крайние на кривой $y = \varphi(x)$ особые точки системы (1′) узлами или седлами.

Далее доказывается, что тип сложной особой точки системы (1) определяется числами m и Δ_m. Бендиксон показал ([2]), что тип особой точки в этом случае определяется числами a и n, получающимися в результате последовательного применения билинейных преобразований определенного типа. Оказывается, что $a = \Delta_m$ и $n = m$. Таким образом выясняется геометрический смысл бендиксоновских чисел a и n.

Б. Случай $\Delta = 0$ и $\delta = 0$. Применяя метод Бендиксона, нетрудно установить, что в этом случае возможны следующие типы сложных особых точек (m-кратность точки).

I. m четное.

1) $C = 2$, $N = 0$, $N_f = 0$. Мы будем называть такую точку вырожденной особой точкой.

2) Седло-узел ($C = 2$, $N = 1$, $N_f = 0$).

II. m нечетное.

1) Седло ($C = 4$, $N = 0$, $N_f = 0$).

2) Узел ($C = 0,\ N = 1,\ N_f = 0$).

3) $C = 1,\ N = 0,\ N_f = 1$ — такую точку мы будем называть точкой с замкнутой узловой областью.

4) Фокус ($C = 0,\ N = 1,\ N_f = 0$).

5) Центр.

Для того чтобы определить, к какому из указанных типов принадлежит данная особая точка, система (1) приводится к виду

$$\frac{dy}{dt} = Q_2(x, y), \quad \frac{dx}{dt} = y + P_2(x, y),$$

где $Q_2(x, y)$ и $P_2(x, y)$ — аналитические функции, разложения которых по степеням x и y не содержат линейных членов.

Далее рассматриваются разложения в ряд следующих функций:

$$\psi(x) = Q_2(x, \varphi(x)) = \Delta_m x^m + \ldots; \tag{4}$$

$$\delta(x, \varphi(x)) = \delta_n x^n + \ldots \tag{5}$$

Здесь $\varphi(x)$ есть решение уравнения $y + P_2(x, y) = 0$, а $\delta(x, y)$ — функция, определяемая второй из формул (3).

Оказывается, что тип особой точки определяется первыми членами разложения в ряд рассмотренных функций, т. е. числами m, n, Δ_m и δ_n *.

В следующих теоремах указанные типы особых точек характеризуются по числу и характеру грубых точек, на которые данная сложная точка распадается. Так же как в случае А, мы будем рассматривать только допустимые добавки. Если при этом получается максимальное число, т. е. m грубых точек, то соответствующие добавки мы будем называть расщепляющими.

Теорема 2. *Четнократная особая точка O системы* (1) *является вырожденной особой точкой в том и только в том случае, если найдется такое $\varepsilon^* < \varepsilon_0$, что при любом $\varepsilon < \varepsilon^*$ существуют расщепляющие ε-добавки, при которых система (1′) не имеет грубых узлов в δ_0-окрестности точки O (т. е. все точки системы (1′), у которых $\Delta > 0$, являются грубыми фокусами).*

Теорема 3. *Нечетнократная особая точка O системы* (1) *является седлом в том и только в том случае, если при всех допустимых ε_0-добавках система (1′) имеет в δ_0-окрестности точки O грубых седел на одно больше, чем грубых узлов и фокусов.*

При рассмотрении вопроса о различии точки с замкнутой узловой областью и узла от фокуса и центра, мы будем предполагать, что число $\lambda = \delta^2_n + 4(m+1)\Delta_m \neq 0$, где Δ_m и δ_n определяются соотношениями (4) и (5). При этом условии имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Нечетнократная особая точка O системы* (1), *не являющаяся седлом, является фокусом или центром в том и только в том случае, если найдется число ε^*, $0 < \varepsilon^* < \varepsilon_0$, такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon^*$ существуют расщепляющие ε-добавки, при которых система (1′) не имеет грубых узлов в δ_0-окрестности точки O.*

Будем теперь рассматривать только такие допустимые ε_0-добавки, при которых число седел системы (1′), удовлетворяющих соотношению $\delta = 0$, является максимально возможным. Тогда выполняется

Теорема 5. *Пусть нечетнократная точка не является фокусом или центром. Тогда она представляет собой узел в том случае, если при всех указанных выше допустимых ε_0-добавках*

---

* В работе ([3]) Хаимов устанавливает наличие указанных структур методом Фроммера.

крайние на кривой $y = \varphi(x)$ особые точки системы (1′) имеют одинаковый характер устойчивости. В противоположном случае точка О является точкой с замкнутой узловой областью.

Поступило
15 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Андронов, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, М. — Л., 1937. [2] I. Bendixson, Acta Math., 24 (1901). [3] Н. Б. Хаимов, Уч. зап. физ.-мат. факульт. Сталинабадск. пед. и учит. инст., 1 (1952)