Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

МАТЕМАТИКА

А. Г. ВИТУШКИН

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ВАРИАЦИЙ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 I 1954)

Пусть в координатном m-мерном пространстве R^m расположено замкнутое* множество E и открытое множество G. Обозначим через R_i^ν $(i=1, 2, \ldots, C_m^\nu)$ систему всех ν-мерных «координатных» (т. е. натянутых на какие-либо ν осей координат) линейных подпространств пространства R^m. Для точки $q \in R_i^\nu$ обозначим через $R_i^{m-\nu}(q)$ ортогональное к R_i^ν подпространство размерности $m-\nu$, проходящее через q. Через $\xi_i(q)$ обозначим число компонент пересечения $E \cap R_i^{m-\nu}(q)$, лежащих целиком внутри области G. Можно показать, что функция $\xi_i(q)$ измерима по Лебегу. Вариацией порядка ν множества E в области G назовем число

$$W_\nu(E, G) = \sum_{i=1}^{C_m^\nu} \int_{R_i^\nu} \xi_i^\nu(q)\, dq. \tag{1}$$

Сумму

$$W = \sum_{\nu=1}^{m-1} W_\nu(E, G) \tag{2}$$

назовем просто вариацией множества E в G.

Приводимая далее теорема 1 является уточнением одного результата А. С. Кронрода. Более специальная теорема 2 существенна для некоторых аналитических применений.

Теорема 1. *Предположим, что в пространстве R^m расположены m-мерные открытые кубы Ω и Ω_0 с общим центром, сторонами, равными, соответственно, a и $a/2$, и ребрами, параллельными осям координат. Пусть связное замкнутое множество E пересекается с границами обоих кубов и лебеговская $q+1$-мерная мера всех проекций E на $q+1$-мерные координатные плоскости равна нулю. Тогда существует такое ν $(1 \leqslant \nu \leqslant q)$, что*

$$W_\nu(E, \Omega) \geqslant \left(\frac{a}{8(q+1)}\right)^\nu. \tag{3}$$

---

* Мы ограничиваемся замкнутыми множествами E, так как для существенно более общих классов множеств, чем класс замкнутых множеств, не доказана измеримость вводимых далее функций $\xi_i^\nu(q)$. Наши определения можно, однако, применить к произвольному множеству E, если в формуле (1) пользоваться верхним интегралом Лебега.

Теорема 2. *Пусть отображение пространства R^q в пространство R^m*

$$y = P(z)$$

задается покоординатно многочленами

$$y_i = P_i(z_1, z_2, \ldots, z_q), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

степени r по каждому из переменных z_j. Обозначим через E образ R^q в R^m. Для любого m-мерного куба Ω в R^m со стороной a и ребрами, параллельными осям координат, при любом $\nu\,(1 \leqslant \nu < m-1)$ имеет место неравенство

$$W_\nu(E, \Omega) \leqslant a^\nu C_m^\nu (6r)^{3q}. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 2 основано на том, что, в силу результатов О. А. Олейник [1], число компонент множества уровня для многочлена степени r не превосходит $(3\,r)^{3q}$. Для вариации $W(E, \Omega)$ из теорем 1 и 2 легко получаются такие следствия:

А. Если в условиях теоремы 1 $a \leqslant 1$, то

$$W(E, \Omega) \geqslant \left(\frac{a}{8\,(q+1)}\right)^q. \tag{5}$$

Б. Если в условиях теоремы 2 $a \leqslant 1$, то

$$W(E, \Omega) \leqslant a\,(6r)^{3q}\,qm^q. \tag{6}$$

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Олейник, Матем. сборн., 28, 635 (1951).