Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. И. БРИШ

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\varepsilon y'' = f(x, y, y')$ ПРИ МАЛЫХ ε

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 I 1954)

В настоящей заметке мы изучим поведение решений некоторых краевых задач для уравнения

$$\varepsilon y'' = f(x, y, y') \quad (\varepsilon > 0) \tag{1}$$

при ε стремящемся к нулю. В случае, когда $f(x, y, y') \equiv A(x, y) y' + B(x, y)$, первая краевая задача, т. е. задача с краевыми условиями $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, рассмотрена в работах [1,2]. В работе [3] рассмотрена также первая краевая задача в случае, когда $f(x, y, y') \equiv A(x, y) y' + F(x, y, y')$, где F — ограниченная функция.

Для решений $y_\varepsilon(x)$ уравнения (1) на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$y_\varepsilon(a) = y_\varepsilon(b) = 0, \tag{2}$$

справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* 1) *в области* $a \leqslant x \leqslant b$, $|y| < d$ *существует при всяком достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *решение* $y_\varepsilon(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (2); 2) *производная* $y'_\varepsilon(x)$ *при каждом фиксированном* ε *ограниченная функция* x *на* $[a, b]$; 3) *функция* f *непрерывна вместе с производными* f_x, f_y *и* $f_{y'}$ *в области* $G: a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant d$, $|y'| < \infty$; 4) $f_{y'} \leqslant -k < 0$ *в* G. *Тогда существует на* $[a, b]$ *решение* $u(x)$ *уравнения*

$$f(x, u, u') = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющее условию $u(b) = 0$, *и справедливы неравенства*

$$|y_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant |u(a)| e^{C_1(x-a)} e^{-\frac{k}{\varepsilon}(x-a)} + C_2\varepsilon, \tag{4}$$

$$|y'_\varepsilon(x) - u'(x)| \leqslant \frac{C'_1}{\varepsilon} e^{-\frac{k}{\varepsilon}(x-a)} + C'_2\varepsilon, \quad a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b, \tag{5}$$

где C_1, C_2, C'_1 *и* C'_2 — *постоянные, не зависящие от* ε.

Отметим, что условия 1) и 2) теоремы 1 всегда будут выполнены, если $f_y(x, y, 0) > 0$ и $|f(x, y, y')| \leqslant K(1 + y'^2)$, где K постоянна [4].

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) *существует на* $[a, b]$ *решение* $u(x)$ *уравнения* (3) *с условием* $u(b) = 0$; 2) *функция* f *непрерывна вместе с производными* f_x, f_y *и* $f_{y'}$ *в области* G: $a \leqslant x \leqslant b$, $|y - u(x)| \leqslant d$, $|y'| < \infty$; $(d > 0, u(a) - d < 0 < u(a) + d)$; 3) $f_{y'} \leqslant -k < 0$ *в* G; 4) $|f(x, y, y')| \leqslant \chi(|y'|)$ *в* G, *где*

$\chi(z)$ — непрерывная положительная функция при $0 \leqslant z < \infty$ и такая, что $\int\limits_0^\infty \frac{z\,dz}{\chi(z)} = \infty$. Тогда при всяком достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует решение $y_\varepsilon(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), и справедливы неравенства (4) и (5).

Доказательство. Функции

$$\overline{\omega}(x) = \begin{cases} u(x) + \frac{\varepsilon M\gamma}{l}\left(e^{\lambda_2(x-b)} - 1\right), & u(a) \geqslant 0; \\ u(x) - u(a)e^{\lambda_1(x-a)} + \frac{\varepsilon M\gamma}{l}\left(e^{\lambda_2(x-b)} - 1\right), & u(a) < 0; \end{cases}$$

$$\underline{\omega}(x) = \begin{cases} u(x) - u(a)e^{\lambda_1(x-a)} - \frac{\varepsilon M\gamma}{l}\left(e^{\lambda_2(x-b)} - 1\right), & u(a) \geqslant 0; \\ u(x) - \frac{\varepsilon M\gamma}{l}\left(e^{\lambda_2(x-b)} - 1\right), & u(a) < 0, \end{cases}$$

где γ — любое число > 1; $\lambda_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4\varepsilon l}}{2\varepsilon}$, $\lambda_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4\varepsilon l}}{2\varepsilon}$; $|f_y(x, y, u'(x))| \leqslant l$, $|u''(x)| \leqslant M$, удовлетворяют на $[a, b]$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ неравенствам $\varepsilon\overline{\omega}''(x) < f(x, \overline{\omega}(x), \overline{\omega}'(x))$, $\varepsilon\underline{\omega}''(x) > f(x, \underline{\omega}(x), \underline{\omega}'(x))$. Кроме того, $\overline{\omega}(a) > 0$, $\overline{\omega}(b) \geqslant 0$, $\underline{\omega}(a) < 0$, $\underline{\omega}(b) \leqslant 0$ и $\underline{\omega}(x) < \overline{\omega}(x)$ при $a < x < b$.

Отсюда следует в силу теоремы из ([5]) существование решения $y_\varepsilon(x)$ и неравенство $\underline{\omega}(x) \leqslant y_\varepsilon(x) \leqslant \overline{\omega}(x)$. Из этого неравенства получаем неравенство (4). Неравенство (5) следует из теоремы 1.

Отметим, что теорема 2, как это следует из ([4]), может оказаться неверной, если не выполняется условие 4).

Рассмотрим некоторые случаи, когда условие 3) теоремы 2 не выполняется. Предположим, что уравнение (1) имеет вид

$$\varepsilon y'' = \Psi(x, y) \quad (\varepsilon > 0). \tag{1'}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия: 1) существует непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$, такая, что $\Psi(x, \varphi(x)) = 0$; 2) функция Ψ непрерывна вместе с производной Ψ_y в области B: $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha_1(x) \leqslant y - \varphi(x) \leqslant \alpha_2(x)$, где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции ($\alpha_1(x) < 0 < \alpha_2(x)$, $\varphi(a) + \alpha_1(a) < 0 < \varphi(a) + \alpha_2(a)$, $\varphi(b) + \alpha_1(b) < 0 < \varphi(b) + \alpha_2(b)$), 3) $\Psi_y \geqslant m > 0$ в B. Тогда при всяком достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует в B единственное решение $y_\varepsilon(x)$ уравнения (1′), удовлетворяющее условиям (2). Решения $y_\varepsilon(x)$ сходятся при $\varepsilon > 0$, стремящемся к нулю, к $\varphi(x)$ равномерно на $[a + \delta, b - \delta]$ ($\delta > 0$). Если, кроме того, функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то*

$$|y_\varepsilon(x) - \varphi(x)| \leqslant |\varphi(a)|\, e^{-\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}(x-a)} + |\varphi(b)|\, e^{-\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}(b-x)} + \frac{M\varepsilon}{m},$$

где $|\varphi''(x)| \leqslant M$.

В случае, когда $f_{y'} \neq 0$, справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть выполнены условия: 1) существует на $[a, b]$ некоторое непрерывно дифференцируемое решение $u(x)$ уравнения (3); 2) функция f непрерывна вместе с производными f_y и $f_{y'}$ в области G: $a \leqslant x \leqslant b$, $|y - u(x)| \leqslant d$, $|y'| < \infty$ ($d > 0$, $u(a) - d < 0 < u(a) + d$, $u(b) - d < 0 < u(b) + d$; 3) существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ ($\delta_1 + \delta_2 < b - a$), $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, такие, что $f_{y'} \leqslant -k_1$ при $a \leqslant x \leqslant a + \delta_1$*

и $(x, y, y') \in G$, *если* $u(a) \neq 0$; $f_{y'} \geqslant k_2$ *при* $b - \delta_2 \leqslant x \leqslant b$ *и* $(x, y, y') \in G$, *если* $u(b) \neq 0$; 4) $f_y(x, u(x), u'(x)) > 0$ *при* $a + \delta_1 \leqslant x \leqslant b - \delta_2$; 5) *в* G *выполняется условие* 4) *теоремы* 2. *Тогда при всяком достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $y_\varepsilon(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (2), *такое, что* $y_\varepsilon(x) \to u(x)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно на любом отрезке, полученном из* $[a, b]$ *исключением любых окрестностей тех его концов, где* $u(x)$ *не обращается в нуль. Если, кроме того,* $u(x)$ *— дважды непрерывно дифференцируемая функция, то*

$$|y_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant |u(a)| e^{C_1(x-a)} e^{-\frac{k_1}{\varepsilon}(x-a)} + |u(b)| e^{C_2(b-x)} A e^{-\frac{k_2}{\varepsilon}(b-x)} + C_3\varepsilon,$$

где C_1, C_2 *и* C_3 *— постоянные, не зависящие от* ε.

Доказательство теорем 3 и 4 аналогично доказательству теоремы 2.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ решения $y_\varepsilon(x)$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &\alpha y_\varepsilon(a) + \alpha' y'_\varepsilon(a) = 0 \quad (|\alpha| + |\alpha'| > 0); \\ &\beta y_\varepsilon(b) + \beta' y'_\varepsilon(b) = 0 \quad (|\beta| + |\beta'| > 0). \end{aligned} \tag{6}$$

В случае когда $\alpha' \neq 0$, справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть уравнение* (3) *имеет на* $[a, b]$ *решение* $u(x)$, *удовлетворяющее условию* $\beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$. *Далее, пусть для каждого такого решения* $u(x)$ *выполнены следующие условия*: 1) *функция* f *непрерывна вместе с производными* f_x, f_y *и* $f_{y'}$ *в области* D:

$$a \leqslant x \leqslant b, \ |y - u(x)| \leqslant d, \ |y' - u'(x)| \leqslant \left(\frac{|\alpha u(a) + \alpha' u'(a)|}{|\alpha'|} + h\right) e^{-C(x-a)} + r(x),$$

где $\alpha' \neq 0$, d, h *и* C *— положительные постоянные,* $r(x)$ *— положительная непрерывная на* $[a, b]$ *функция*; 2) $f_{y'} \leqslant -k < 0$ *в* D; 3) $\beta' f_y(b, u(b), u'(b)) - \beta f_{y'}(b, u(b), u'(b)) \neq 0$. *Тогда при всяком достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *и для каждого* $u(x)$ *существует единственное решение* $y_\varepsilon(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (6). *При этом справедливы неравенства*

$$|y_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant C_1\varepsilon,$$

$$|y'_\varepsilon(x) - u'(x)| \leqslant \frac{|\alpha u(a) + \alpha' u'(a)|}{|\alpha'|} e^{-\frac{k}{\varepsilon}(x-a)} + C_2\varepsilon, \tag{7}$$

где C_1 *и* C_2 *— постоянные, не зависящие от* ε.

Доказательство. Можно фиксировать постоянные $d = d^*$, $h = h^*$, $C = C^*$ и функцию $r(x) = r^*(x)$ такими, что в области $a \leqslant x \leqslant b$, $|y - u(x)| \leqslant d^*$ существует только одно решение $u(x)$ и

$$\beta' f_y(b, y, y') - \beta f_{y'}(b, y, y') \neq 0, \tag{8}$$

если точка $(b, y, y') \in D^*$. Пусть $y_\varepsilon(x, \mu)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $y_\varepsilon(a, \mu) = u(a) + \mu$, $y'_\varepsilon(a, \mu) = -\frac{\alpha}{\alpha'}[u(a) + \mu]$, где μ — параметр, $u(x, \mu)$ — решение уравнения (3) при условии $u(a, \mu) = u(a) + \mu$. Воспользовавшись леммой из ([6]), можно доказать, что

$y_\varepsilon(x,\mu)$ и $y'_\varepsilon(x,\mu)$ существуют на $[a, b]$ при всех достаточно малых $|\mu|$ и $\varepsilon > 0$. При этом справедливы неравенства

$$|y_\varepsilon(x,\mu) - u(x,\mu)| < \varepsilon\left(\frac{\gamma}{k^2} + \frac{M}{l}\right)e^{\frac{l}{k}(x-a)},$$
$$|y'_\varepsilon(x,\mu) - u'(x,\mu)| \leqslant \gamma e^{-\frac{k}{\varepsilon}(x-a)} + \varepsilon\left(\frac{l\gamma}{k^2} + \frac{M}{k}\right)e^{\frac{l}{k}(x-a)}, \tag{9}$$

где $|f_y| \leqslant l$, $|u''(x,\mu)| \leqslant M$, $\gamma = \frac{|\alpha u(a) + \alpha' u'(a)|}{|\alpha'|} + |\mu|\left(\frac{l}{k} + \frac{|\alpha|}{|\alpha'|}\right)$.

В силу соотношений (8) и (9) найдется $\mu = \mu^*$, $|\mu^*| < C_0\varepsilon$, (C_0— постоянная, не зависящая от ε) такое, что $\beta y_\varepsilon(b,\mu^*) + \beta' y'_\varepsilon(b,\mu^*) = 0$ при всех достаточно малых ε. Таким образом, $y_\varepsilon(x,\mu^*) = y_\varepsilon(x)$ является искомым решением в области $a \leqslant x \leqslant b$, $|y - u(x)| \leqslant d^*$. Неравенства (7) следуют из неравенств (9).

Функция $w(x) = \frac{\partial y_\varepsilon(x,\mu)}{\partial\mu}$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon w'' - f_{y'}(x, y_\varepsilon(x,\mu), y'_\varepsilon(x,\mu))\, w' - f_y(x, y_\varepsilon(x,\mu), y'_\varepsilon(x,\mu))\, w = 0$$

и условиям $w(a) = 1$, $w'(a) = -\alpha/\alpha'$. Отсюда следует, в силу теоремы сравнения ([7]), что либо $\beta w(b) + \beta' w'(b) > 0$, либо $\beta w(b) + \beta' w'(b) < 0$ при всех достаточно малых ε. Следовательно, найденное выше решение $y_\varepsilon(x)$ единственно в области $a \leqslant x \leqslant b$, $|y - u(x)| \leqslant d^*$ при всяком достаточно малом ε.

Если же $\alpha' = 0$ ($\beta' \neq 0$), то аналогично можно доказать следующее утверждение:

Теорема 6. *Пусть уравнение* (3) *имеет на* $[a, b]$ *решение* $u(x)$, *удовлеторяющее условию* $\beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$. *Далее, пусть для каждого такого решения* $u(x)$ *выполнены условия* 3) *теоремы* 5 *и* 2), 3), 4) *теоремы* 2. *Тогда при всяком достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *и для каждого* $u(x)$ *существует решение* $y_\varepsilon(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (6) ($\alpha' = 0$, $\beta' \neq 0$). *При этом справедливы неравенства вида* (4) *и* (5).

Отметим, что случай $\varepsilon < 0$ сводится к рассмотренному случаю, если воспользоваться подстановкой $x = -t$.

Выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю И. Г. Петровскому.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. V. Mises, Acta Sc. Math. Szeged, **12**, p. B, 29 (1950) [2] E. A. Coddington, N. Levinson, Am. Math. Soc., **3**, № 1, 73 (1952). [3] О. А. Олейник, А. И. Жижина, Матем. сборн., **31** (73) : 3, 709 (1952). [4] С. Н. Бернштейн, Усп. матем. наук, **8**, 32 (1941). [5] M. Nagumo, Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan, **19**, ser. 3, № 10, 861 (1937). [6] M. Nagumo, ibid., **21**, ser. 3, 529 (1939). [7] E. Kamke, Am. Math. Mont., **46**, No. 7, 417 (1939).