Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 6

ФИЗИКА

М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН

СПЕКТР ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 26 XII 1953)

Недавно Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук [1] указали на тот интересный факт, что проникающая способность легких частиц при сверхбольших энергиях ($E \geqslant 10^{12} - 10^{13}$ эв для плотных сред с большим атомным номером) резко увеличивается. Этот результат является следствием влияния многократного кулоновского рассеяния на тормозное излучение электрона.

Мы хотели бы заметить, что уже начиная с гораздо меньших энергий электрона обычная формула Бете — Гайтлера для излучения мягких квантов в среде становится неприменимой. Существенно отметить, что при этом потери энергии практически останутся прежними.

Причина этих изменений лежит во взаимодействии излученных квантов со средой. Если среда однородна (см. ниже) и прозрачна (т. е. рассеянием и поглощением кванта можно пренебречь), то учет этого взаимодействия очень прост как в классической, так и в квантовой электродинамике. Все дело сводится к тому, что в исходных уравнениях поля нужно заменить скорость кванта c на фазовую скорость c/n, где $n = \sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления для заданной частоты. Несмотря на то, что эта задача может быть без труда рассчитана обычным квантово-механическим способом [2] (в той области энергий, где эффект Ландау — Померанчука еще не сказывается), мы будем полностью следовать классическому рассмотрению [1], которое дает правильный результат для излучения квантов, энергия которых много меньше начальной энергии электрона.

Поток энергии, излучаемой в телесном угле $d\Omega$ и в интервале частот $d\omega$, равен

$$dI' = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \sqrt{\varepsilon}\, \omega^2 d\omega\, d\Omega \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{nv}]\, e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\, dt \right|^2, \tag{1}$$

где $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор и $\mathbf{v}(t)$ — скорость электрона; $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления кванта.

Волновой вектор и частота излученного кванта связаны соотношением

$$\mathbf{k} = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c}\, \mathbf{n}. \tag{2}$$

Формулу (1) легко получить, исходя из соответствующей формулы при отсутствии среды. При выводе необходимо только учесть соотношение (2) и то обстоятельство, что наличие среды приводит для компонент плоской электромагнитной волны к связи $E_\omega = [\mathbf{n}\mathbf{H}_\omega] / \sqrt{\varepsilon}$.

При дальнейшем преобразовании формулы (1) следуем работе ([1]). В результате для энергии, излученной в интервале частот $d\omega$ в единицу времени, получаем выражение:

$$dI'' = \frac{e^2}{c}\frac{\omega\, d\omega}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{\frac{\vec{\theta}_t \int\limits_0^t \vec{\theta}_\tau\, d\tau}{t} - \frac{\left[\int\limits_0^t \vec{\theta}_\tau\, d\tau\right]^2}{t}\right\} \times$$

$$\times \sin\left(kv\left\{t - \frac{\int\limits_0^t \theta_\tau^2\, d\tau}{2} + \frac{\left[\int\limits_0^t \vec{\theta}_\tau\, d\tau\right]^2}{2t}\right\}\right)\frac{e^{i\omega t}}{t}, \tag{3}$$

где $\vec{\theta}_\tau$ — угол многократного рассеяния за время τ, который описывается двухмерным вектором в плоскости, перпендикулярной движению. Формула (3) отличается от соответствующей формулы работы ([1]) только иной связью волнового вектора с частотой. При выводе формулы (3) предполагалось, что промежуток времени Δt, дающий основной вклад в интеграл, такой, что

$$\Delta t \gg \frac{1}{\omega}, \tag{4}$$

а также что угол многократного рассеяния в течение этого промежутка много меньше единицы.

Формулу (3) необходимо усреднить по всем возможным углам отклонения электрона. Пользуясь формулами многократного рассеяния ([1]), получим приближенно

$$dI \approx -\frac{e^2\omega\, d\omega}{\pi}\frac{E_s^2}{3LE^2}\int\limits_0^\infty \cos\omega t \sin kv\left(t - \frac{E_s^2\, ct^2}{12\, E^2 L}\right)dt, \tag{5}$$

где L — длина радиационной единицы в сантиметрах; $E_s = 21$ Мэв. Неточность формулы (5) связана только с тем, что при усреднении (3) аргумент синуса заменялся его средним значением.

Рассмотрим излучение частот бо́льших, чем атомные. Тогда

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}, \tag{6}$$

где N — число электронов в единице объема.

Чтобы удовлетворялось (4), необходимо выполнение условия $\omega - kv \ll \omega$, что при $v \approx c$ приводит к ограничению для частот

$$\omega \gg \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}}. \tag{7}$$

Тогда формулу (5) можно переписать иначе:

$$dI \approx \frac{e^2}{\pi}\frac{d\omega}{\left(1 - \sqrt{\varepsilon}\frac{v}{c}\right)}\frac{E_s^2}{6LE^2}\int\limits_0^\infty \sin\left\{x + \frac{E_s^2\, c\omega}{12\, E^2 L}\frac{x^2}{(\omega - kv)^2}\right\}dx. \tag{8}$$

Если

$$\frac{E_s^2\, c\omega}{12\, E^2 L\, (\omega - kv)^2} \gg 1, \tag{9}$$

что, в силу соотношений (2) и (6), означает, что рассматривается интервал частот

$$\left\{\left(\frac{4\pi Ne^2}{m}\right)^2\frac{6E^2L}{E_s^2\, c}\right\}^{1/3} \ll \omega \ll \frac{E_s^2}{6m^2c^3L}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2, \tag{10}$$

то мы приходим к формуле Ландау — Померанчука

$$dI \approx \frac{e^2}{2c} \sqrt{\omega}\, d\omega \frac{E_s}{E} \sqrt{\frac{c}{6\pi L}}. \tag{11}$$

Отметим, что область частот (10), где справедлива формула (11), появляется лишь при достаточно больших энергиях, именно, согласно неравенству (10), если

$$E \geqslant E_0 = \left(\frac{mc^2}{E_s}\right)^2 \frac{6L}{c} \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}}\, mc^2. \tag{12}$$

Для плотных сред конца периодической системы $E_0 \approx 10^4\, mc^2$. Вне этого интервала при больших частотах

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \frac{E_s^2}{6m^2c^3L} \ll \omega \ll \frac{E}{h} \tag{13}$$

или при малых частотах

$$\sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}} \ll \omega \ll \left\{\left(\frac{4\pi Ne^2}{m}\right)^2 \frac{6E^2L}{E_s^2c}\right\}^{1/3} \tag{14}$$

можно пренебречь членами, учитывающими рассеяние в аргументе синуса. Тогда усреднение проводится точно:

$$dI = \frac{e^2}{\pi} \omega\, d\omega \frac{E_s^2}{6LE^2} \int_0^\infty \sin(\omega - kv)\, t\, dt. \tag{15}$$

Последний интеграл нужно рассматривать как быстро осциллирующую функцию верхнего предела. Усредняя по малому интервалу около верхнего предела, получим

$$dI = \frac{e^2 E_s^2\, \omega\, d\omega}{6\pi LE^2} \frac{1}{\omega - kv}. \tag{16}$$

Как для больших (13), так и для малых (14) частот формула (16) может быть упрощена в двух предельных случаях:

а) Если

$$\omega \gg \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{E}{mc^2}}, \tag{17}$$

что для плотных сред с большим атомным весом приводит к условию $\frac{h\omega}{E} \geqslant 10^{-4}$, то $\omega - kv \approx \omega(1 - v/c)$, и формула (16) примет вид

$$dI = \frac{e^2}{3\pi} \frac{d\omega}{L} \frac{E_s^2}{m^2c^4}. \tag{18}$$

Учитывая, что $E_s = \sqrt{4\pi \cdot 137}\, mc^2$, а $\frac{1}{L} = \frac{4N'}{137} \left(\frac{Ze^2}{mc^2}\right)^2 \log 191\, Z^{-1/3}$, где N' — число атомов в 1 см³, мы замечаем, что (18) в точности совпадает с формулой Бете — Гайтлера в области малых квантов.

б) Если

$$\sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{E}{mc^2}}, \tag{19}$$

то формула (16) принимает существенно новый вид:

$$dI = \frac{E_s^2\, m}{12\pi^2 LN} \frac{\omega^2\, d\omega}{E^2}. \tag{20}$$

Интересно, что интенсивность излучения в этом случае не зависит от плотности вещества. Относительно границ применимости последней формулы нужно заметить следующее. При использовании показателя преломления $\varepsilon(\omega)$ необходимо, вообще говоря, предположить, что среда однородна на расстояниях порядка c/ω. В нашем же случае достаточно требовать однородности среды на расстояниях, эффективных при излучении, т. е. на расстояниях $l_{эф} \sim \frac{c}{\omega - kv}$ (см. (15)). Для всех частот, где справедлива формула (20), эффективные расстояния много больше среднего расстояния между атомами, т. е. среда действительно однородна. Далее, если энергия излученного кванта становится сравнимой с собственной энергией электрона, то помимо разобранного эффекта нужно учитывать также комптоновское рассеяние электронов. Для оценки влияния комптон-эффекта на тормозное излучение нужно несколько изменить формулу (1), введя в показателе фактор, учитывающий поглощение фотонов в самом акте излучения за счет комптоновского рассеяния. Коэффициент поглощения γ-лучей равен $\alpha = \pi N \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{mc^2}{h\omega}\left[\ln\frac{2h\omega}{mc^2} + \frac{1}{2}\right]$; сравнивая его с дополнительным фактором в экспоненте, который появляется за счет введения показателя преломления и равного $2\pi Ne^2/m\omega c$, мы видим, что влиянием комптон-эффекта можно пренебречь практически всегда (этим замечанием я обязан Л. Д. Ландау).

Суммируя изложенное выше, мы приходим к выводу, что вплоть до энергий электрона, равных E_0 (см. (12)), спектр тормозного излучения дается формулой (16), которая для частот, удовлетворяющих условию (17), переходит в обычную формулу Бете — Гайтлера (18), а для малых частот, удовлетворяющих условию (19), переходит в формулу (20).

Начиная с энергий E_0, появляется интервал частот, границы которого даются неравенством (10), где применима формула Ландау — Померанчука. Вне интервала (10) остается справедливой формула (16) и ее предельные случаи (18) и (20).

В заключение выражаю благодарность Е. Л. Фейнбергу за внимание и интерес к работе.

Физический институт АН Арм.ССР
Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
18 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН, **92**, № 3, 535 (1953); **92**, № 4, 735 (1953). [2] В. Л. Гинзбург, J. of Physics, **2**, 441 (1940). [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, 1948, стр. 200.