Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 6

МАТЕМАТИКА

С. Х. ТУМАНЯН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ КРИТЕРИЯ χ^2

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 XII 1953)

Выражение

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{s} \frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2$$

служит для оценки расхождения между заданными вероятностями $p_0, p_1, \ldots, p_s$ каждого из $s+1$ возможных исходов испытания и относительными частотами $\frac{m_0}{n}, \frac{m_1}{n}, \ldots, \frac{m_s}{n}$ появления этих исходов при n независимых испытаниях. Распределение вероятностей

$$P(\chi^2 < x) = F(x)$$

величины χ^2 зависит, очевидно, от s вероятностей $p_0, p_1, \ldots, p_s$ и числа испытаний n. Общеизвестны два факта:

1. *Если s и p_i $(i = 0, 1, \ldots, s)$ постоянны, то при $n \to \infty$ равномерно по x*

$$F(x) \to K_s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{s/2}\,\Gamma(s/2)} \displaystyle\int x^{(s-1)/2} e^{-x/2} dx, & x \geqslant 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

2. *При $s \to \infty$ равномерно по u*

$$K_s(s + u\sqrt{2s}) \to \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-u^2/2} du.$$

Обычно принимается, что распределение $F(x)$ можно заменять распределением $K_s(x)$ во всех случаях, когда все произведения np_i достаточно велики, и нормальным распределением, если кроме того достаточно велико s. Однако сформулированные выше два предложения, строго говоря, недостаточны даже для принципиального обоснования такой практики. Ввиду этого может представлять интерес следующая теорема.

3. *Как бы ни изменились одновременно n, s и p_i при условии*

$$\min_{0 \leqslant i \leqslant s} np_i \to \infty,$$

равномерно по x имеет место соотношение

$$|F(x) - K_s(x)| \to 0.$$

Для случая $s \to \infty$ можно доказать:

4. *Если n, s, k и p_i $(i = 0, 1, \ldots, s)$ меняются одновременно так, что $s \to \infty$, $\frac{k}{s} \to 0$, а произведения np_i для номеров $0 \leqslant i \leqslant k$ остаются в пределах*

$$c \leqslant np_i \leqslant C,$$

где $c > 0$ и C постоянны, для номеров же $i > k$ удовлетворяют условию

$$\min_{k \leqslant i \leqslant s} np_i \to \infty,$$

то равномерно по u

$$F(s + u\sqrt{2s}) \to \Phi(u).$$

В заключение выражаю Н. В. Смирнову благодарность за ценные советы, данные при выполнении настоящей работы.

Поступило
10 XII 1953