Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 6

МАТЕМАТИКА

К. СИТНИКОВ

ПРИМЕР ДВУМЕРНОГО МНОЖЕСТВА В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, НЕ РАЗРЕЗАЮЩЕГО НИКАКОЙ ОБЛАСТИ ЭТОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком П. С. Александровым 31 XII 1953)

1. В этой заметке строится двумерное множество A в трехмерном евклидовом пространстве R^3, обладающее следующим свойством:

Каков бы ни был шар $U \subset R^3$, множество A его не разрезает, т. е. любые две точки из $U \setminus A$ принадлежат континууму, лежащему в $U \setminus A$.

Из того, что множество A не разрезает никакого шара, следует, что оно не разрезает и никакой области в R^3.

Из того же свойства следует далее:

Какова бы ни была область $U \subseteq R^3$, всякий лежащий в $U \setminus A$ компактный нульмерный (виеторисовский) цикл ограничивает в $U \setminus A$.

В то же время в дополнении $B = R^3 \setminus A$ к множеству A можно найти такие две точки, что образованный ими нульмерный цикл не ограничивает в B в смысле моей работы ([1])*; отсюда, в силу доказанной в ([2]) общей теоремы о препятствиях, и вытекает двумерность множества A.

Из сказанного следует далее, что доказанная мною теорема «о препятствиях» является окончательной: она теряет силу, если заменить употребляемые в ней Δ-гомологии виеторисовскими.

Итак, с одной стороны, построенный в этой работе пример дает отрицательное решение поставленной еще П. С. Урысоном задачи о характеризации $(n-1)$-мерных множеств n-мерного пространства посредством теоретико-множественного понятия локального разрезания пространства, тогда как, с другой стороны, теорема о препятствиях показывает, что гомологический аналог этой характеризации имеет место, если определить гомологические понятия надлежащим образом, т. е. так, как это сделано мною в ([1]).

2. В построении множества A существенную часть составляет так называемое «включение соленоида в данную ломаную». Оно заключается в следующем. Возьмем прямолинейное звено $\overline{pq}$ ломаной. Берем шар V, имеющий центр в середине o отрезка pq и радиус, меньший половины расстояния от точки o до всех других звеньев

---

* В работе ([1]) Δ-цикл на множестве B определяется как последовательность $z^r = \{z_k^r, x_k^{r+1}\}$ ε_k-циклов z_k^r и ε_k-цепей x_k^{r+1}, лежащих на каком-либо компакте $\psi \subseteq B$, причем $\Delta x_k^{r+1} = z_{k+1}^r - z_k^r$. Цикл z^r о г р а н и ч и в а е т в B, если на некотором компакте ψ', $\psi \subseteq \psi' \subseteq B$, существуют такие ε_k'-цепи y_k^{r+1} и x_k^{r+2}, что $\Delta y_k^{r+1} = z_k^2$, $\Delta x_k^{r+2} = y_{k+1}^{r+1} - y_k^{r+1} - x_k^{r+1}$. При этом ε_k, $\varepsilon_k' \to 0$.

ПОПРАВКА

На стр. 1006 пункт Г следует читать:

Г. Если взять вместо $(a_i(x_i + h_i/2)\, u^{(h)}_{x_i})_{x_i}$ вторые разностные отношения вида $(a_i\, u^{(h)}_{x_i})_{x_i}$ или $(a_i(x_i + h_i)\, u^{(h)}_{x_i})_{x_i}$, то оценки (5) — (6) будут только порядка h.

ДАН, т, 94, № 6. Саульев

ломаной. Через p', q' обозначим точки пересечения границы шара V с отрезком $\overline{pq}$. Внутри шара V берем соленоид S и на нем две какие-нибудь «точки неприводимости» p'', q'' (т. е. две точки, которые нельзя соединить в S простой дугой). Проводим в V простые дуги $\overline{p'p''}$ и $\overline{q'q''}$, не имеющие общих точек ни между собой, ни с соленоидом S (кроме точки p'', соотв., q''). «Включение соленоида» в ломаную и состоит в том, что отрезок $\overline{p'q'}$ ломаной заменяется континуумом, составленным из дуги $\overline{p'p''}$, соленоида S и дуги $\overline{q''q'}$; очевидно, от этой замены диаметр ломаной не увеличивается.

Возьмем шар W радиуса 100 с центром в начале координат. Все дальнейшие построения происходят внутри этого шара; рассмотрим лежащие в W ребра и куски ребер 1-кубильяжа пространства R^3 (т. е. кубильяжа, состоящего из кубов с ребрами длины 1). В каждое из лежащих внутри W ребер этого кубильяжа включаем соленоид так, чтобы полученные «ребра» ранга 1 попарно не имели общих точек (кроме, быть может, общих концов); сумму «ребер» ранга 1 обозначим через Q_1.

Предположим, что построено множество Q_k, являющееся суммой конечного числа «ребер» рангов $\leqslant k$ (каждое «ребро» есть ломаная с включенным в нее соленоидом).

На Q_k берем конечное множество N_k, образующее $\frac{1}{k}$-сеть на каждом «ребре» ранга $\leqslant k$; берем столь малое $\delta_k > 0$, чтобы каждая точка множества N_k отстояла от не содержащих ее «ребер» больше чем на δ_k; строим $\frac{\delta_k}{8}$-кубильяж с вершинами, не принадлежащими Q_k; слегка видоизменяем его ребра, заменяя их ломаными (без увеличения диаметра) так, чтобы они не имели общих точек с Q_k и не пересекались между собой (кроме как в общих концах); в каждую из них включаем соленоид так, чтобы полученные «ребра» не имели точек пересечения ни между собой (кроме как в надлежащих концах), ни с Q_k. Каждое возникшее таким образом «ребро» назовем «ребром» ранга $k+1$; каждую точку множества N_k соединяем с одним из ближайших к ней концов какого-либо из построенных «ребер» ранга $k+1$ ломаной диаметра $< \frac{\delta_k}{4}$; в каждую из них включаем соленоид так, чтобы полученные «ребра», которые также называем ребрами ранга $k+1$, попарно не пересекались (кроме как в общих концах). Сумму всех «ребер» рангов $\leqslant k+1$ обозначим через Q_{k+1}. Это построение продолжаем по индукции бесконечно.

Сумму всех Q_k, $k = 1, 2, \ldots$, обозначаем через B.

Дополнительное множество $A = W \setminus B$ и есть искомое множество.

3. Доказательство двумерности множества A.

Определение *. Пленка u, ограниченная циклом z в компакте $\Phi \subset R^n$, называется существенной, если, каков бы ни был шар V с центром, лежащим в Φ, такой, что цикл z лежит вне этого шара, пересечение пленки u с границей шара V есть существенный цикл.

Лемма. *Если $z^p \sim 0$ в компакте $\Phi_0 \subset R^n$, то существует на некотором компакте $\Phi \subseteq \Phi_0$ существенная пленка, ограниченная циклом z^p.*

В самом деле, пусть $u_0 = \{y_k^{p+1}, x_k^{p+2}\}$ — какая-нибудь пленка, ограниченная циклом z^p в Φ_0. Без ограничения общности можно предположить, что диаметр Φ_0 есть 1.

---

* Циклы и гомологи — в смысле работы (1) (см. предыдущую сноску).

Рассмотрим последовательность $\{\omega_k\}$ конечных покрытий компакта Φ_0 шарами, причем ω_k состоит из шаров радиуса $\frac{1}{k}$. Все шары, являющиеся элементами покрытий ω_k, $k=1, 2, \ldots$, нумеруем в одну последовательность $\{V_m\}$; радиус шара V_m обозначаем через ρ_m.

Возьмем шар V_1 и посмотрим, существует ли в $\Phi_0 \setminus V_1$ пленка $\overset{*}{u}_0$, ограниченная циклом z^p и $8\rho_1$-гомологичная в Φ_0 пленке u_0 в том смысле, что все элементы обеих пленок с одинаковыми достаточно большими номерами $8\rho_1$-гомологичны между собой в обычном смысле. Если такой пленки нет, то пишем $u_1 = u_0$, $\Phi_1 = \Phi_0$; если же пленка $\overset{*}{u}_0$ существует, то определяем для нее такое натуральное ν_1, чтобы, начиная с этого ν_1, все элементы пленки u_0^* были $8\rho_1$-цепями, $8\rho_1$-гомологичными в Φ_0 соответствующим элементам пленки u_0. В частности, через $w_{\nu_1}^{p+2}$ обозначаем такую $8\rho_1$-цепь в Φ_0, что

$$\Delta w_{\nu_1}^{p+2} = y_{\nu_1}^{*p+1} - y_{\nu_1}^{p+1}.$$

Определяем теперь пленку u_1 так: $u_1 = \{y_i^{p+1}, x_i^{p+2}\}$, где y_i^{p+1} при $i \leqslant \nu_1$ и x_i^{p+2} при $i \leqslant \nu_1 - 1$ взяты из u_0; y_i^{p+1} и x_i^{p+2} при $i > \nu_1$ взяты из u_0^*, а $x_{\nu_1}^{p+2} = w_{\nu_1}^{p+2} + x_{\nu_1}^{*p+2}$. Полагаем $\Phi_1 = \Phi_0 \setminus V_1$.

То же испытание производим с шаром V_2 и пленкой u_1 (только берем теперь $8\rho_2$-гомологии); строим новую пленку u_2, натянутую на z^p в Φ_2 так, чтобы она содержала $\nu_1 + 1$ (или больше) первых элементов пленки u_1, и т. д. В результате получаем пленку u, первые ν_1 элементов которой взяты из u_0, следующие ν_2 из u_1 и т. д.; она бесконечно малым сдвигом может быть сдвинута на $\Phi = \bigcap_m \Phi_m$ и, как мы сейчас покажем, является существенной. Действительно, прежде всего $u \underset{8\rho_m}{\backsim} u_{m-1}$ в Φ_{m-1}. Пусть теперь V — такой шар с центром в Φ, что z^p лежит вне него и пересечение пленки u с границей S^{n-1} шара V несущественно. Пусть ρ — радиус шара V; существует некоторый шар $V_m \subset V$ нашей последовательности, содержащий центр шара V и имеющий радиус $\rho_m > \frac{\rho}{4}$. Из несущественности пересечения u с S^{n-1} следует, что u 2ρ-гомологично в Φ некоторой пленке u', лежащей вне V. Но $2\rho < 8\rho_m$, а потому $u \underset{8\rho_m}{\backsim} u'$ в Φ, значит, $u_{m-1} \underset{8\rho_m}{\backsim} u'$ в Φ_{m-1}. Но это — противоречие: центр шара V, лежащий внутри V_m, не может принадлежать компакту $\Phi \subseteq \Phi_{m-1} \setminus V_m$.

Лемма доказана.

4. Переходим к доказательству того, что $\dim A = 2$. Это следует из того, что любой нульмерный цикл z^0, состоящий из двух концов какого-либо «ребра», — например, первого ранга — не ограничивает в B в смысле [1]. Допустим противное, и пусть u — существенная пленка, ограниченная циклом z^0; пусть Φ — та компонента носителя этой пленки, которая содержит пару точек z^0. Континуум Φ не может лежать на Q_1. Действительно, в противном случае Φ содержало бы целиком некоторое «ребро» первого ранга; основываясь на существенности пленки, мы пришли бы к противоречию, состоящему в том, что пара точек p'', q'' этого «ребра» (см. § 2) должна быть циклом, гомологичным нулю (все в том же смысле работы [1]) на соленоиде, содержащемся в данном «ребре». Возьмем точку $\xi_1 \in \Phi$, не принадлежащую Q_1, и пусть наименьшее Q_n, содержащее ξ_1, есть Q_{n_1}. Возьмем носитель точки ξ_1 в Q_{n_1}. Под этим понимаем следующее. Если точка ξ_1 не является концом никакого «ребра» ранга n_1, то она содержится в единственном «ребре» этого ранга, и тогда это «ребро», слегка укоро-

ченное у его концов, и называется носителем точки ξ_1. Если же ξ_1 есть вершина, то его носителем называется сумма прилегающих к этой вершине «ребер» ранга n_1, каждое из которых укорочено у вершины, противоположной вершине ξ_1. Назовем **оперением** $\tilde{X}_1$ носителя X_1 точки ξ_1 сумму самого X_1 и всех «ребер» рангов $>n_1$, примыкающих к X_1, далее всех «ребер», примыкающих к только что взятым «ребрам», и т. д. Из-за быстроты убывания диаметров «ребер» $\tilde{X}_1$ замкнуто в B. Поэтому существует столь тесная окрестность U_1 множества $\tilde{X}_1$, что ее замыкание не пересекается с Q_1.

По соображениям, аналогичным приведенным выше, $U_1 \cap \Phi$ не может целиком лежать на Q_{n_1}, поэтому имеется точка ξ_2, не лежащая на Q_{n_1}, но лежащая настолько близко к Q_{n_1}, что оперение $\tilde{X}_2$ ее носителя X_2 лежит в U_1. Возьмем столь тесную окрестность $U_2 \subset U_1$ множества $\tilde{X}_2$, чтобы ее замыкание не пересекалось с Q_{n_2}, значит, и подавно, с Q_1.

Продолжая этот процесс дальше, получим последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$ континуума Φ, не имеющую предельной точки в $\bigcup\limits_k Q_k = B$, что противоречит тому, что континуум Φ содержится в B.

5. Остается доказать, что какой бы ни был шар U в R^3, всякие две точки в $U \cap B$ могут быть соединены в $U \cap B$ континуумом. Для этого достаточно доказать, что любую точку $\xi \in U \cap B$ можно связать в $U \cap B$ континуумом с точкой, принадлежащей «ребру» сколь угодно высокого ранга. Для этого возьмем последовательность $\{U_k\}$ стягивающихся к точке ξ шаров с центром в ξ, причем уже $\overline{U}_1$ лежит внутри U. Берем в U_1 точку $\xi_1 \in Q_{n_1}$, где n_1 столь велико, что «ребра» ранга n_1, пересекающиеся с U_1, целиком лежат внутри U. Так как к каждому «ребру» примыкают «ребра» сколь угодно большого ранга, то можно точку ξ_1 соединить в U континуумом с лежащей в U_2 точкой $\xi_2 \in Q_{n_2}$ со столь большим n_2, что «ребра» ранга n_2, пересекающиеся с U_2, остаются внутри U_1, и т. д.

Присоединяя к сумме этих континуумов точку ξ, получим континуум, соединяющий в $U \cap B$ точку ξ с точкой ξ_1 (лежащей на «ребре» сколь угодно большого ранга n_1).

Поступило
27 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Ситников, ДАН, **81**, 359 (1951). [2] К. Ситников, ДАН, **83**, № 3, 31 (1952).