Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 6

МАТЕМАТИКА

В. К. САУЛЬЕВ

О НАХОЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МЕТОДОМ СЕТОК

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 XI 1953)

Известно, что одним из наиболее простых и эффективных способов решения задачи о собственных значениях является метод сеток. Однако, если для одномерного случая имеются оценки собственных значений ([1]), то уже для двумерного до сих пор была известна оценка только для первого собственного значения ([2]). При этом оценка дана только для решения с простым сносом граничных значений на аппроксимирующий ступенчатый контур, в результате чего она фактически имеет только первый порядок относительно шага сетки. В данной работе делается попытка оценить все собственные значения, получаемые методом сеток, в случае общего самосопряженного эллиптического m-мерного оператора. При этом, в силу линейной интерполяции граничных значений на сеточную границу, оценка имеет второй порядок относительно шага. Кроме того, для некоторого класса областей оценка дается в случае решения без сноса граничных значений на аппроксимирующую границу.

1. Для нахождения собственных значений $-\lambda$ и соответствующих им собственных решений u задачи

$$Lu+\lambda u\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-au+\lambda u=0 \text{ в } Q;\quad u=0\quad\text{на } \Gamma, \tag{1}$$

где положительные коэффициенты a_i и a непрерывно дифференцируемы по x_i в замкнутой m-мерной области $\overline{Q}$ вплоть до порядков $[m/2]+5$ и $[m/2]+4$, соотв., а функции $y_k=\omega(y_1,\ldots,y_{m-1})$, дающие уравнение $(m-1)$-мерной границы Γ в местных координатах, непрерывно дифференцируемы до порядка $[m/2]+6$, образуем в пространстве правильную параллелепипедную решетку с шагами $h_1, h_2,\ldots,h_m$ (предполагается, что h_i достаточно малы и одного порядка малости) в направлении осей $Ox_1, Ox_2,\ldots,Ox_m$, и для наибольшей решетчатой области $\overline{Q}_h$ с границей Γ_h ($\overline{Q}_h=Q_h\cup\Gamma_h$), целиком расположенной в $\overline{Q}$, будем решать алгебраический аналог задачи (1):

$$L_hu^{(h)}+\lambda^{(h)}u^{(h)}\equiv\sum_{i=1}^{m}\left(a_i\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right)u^{(h)}_{x_i}\right)_{\bar{x}_i}-(a-\lambda^{(h)})\,u^{(h)}=0 \text{ в } Q_h;$$

$$u_B^{(h)}=\frac{\delta_i}{1+\delta_i}\,u_A^{(h)}\qquad\text{на } \Gamma_h, \tag{2}$$

где $u^{(h)}_{x_i}=\frac{1}{h_i}\,[u^{(h)}(x_i+h)-u^{(h)}];\quad u^{(h)}_{\bar{x}_i}=\frac{1}{h_i}\,[u^{(h)}-u^{(h)}(x_i-h_i)];$

$$\left(a_i\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right)u^{(h)}_{x_i}\right)_{\bar{x}_i}=\frac{1}{h_i^2}\left\{a_i\left(x_i-\frac{h_i}{2}\right)u^{(h)}(x_i-h_i)+\right.$$

$$+ a_i\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right)u^{(h)}(x_i+h_i)-\left[a_i\left(x_i+\frac{h_i}{2}\right)+a_i\left(x_i-\frac{h_i}{2}\right)\right]u^{(h)}\Big\};$$

$$\varphi(x_i\pm\tau)=\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x^i\pm\tau,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_m);$$

$$B\in\Gamma_h;\quad A\in Q_h;\quad 0\leqslant\delta_h<1;$$

$\delta_i h_i$ — расстояние по направлению оси Ox_i от точки B до границы Γ (см. рис. 1).

В случае решения задачи (1) без сноса граничных значений в точках, лежащих вблизи границы Γ, т. е. в точках, для которых, по крайней мере для одного индекса i, t_i или $\bar{t}_i$ не равно 1, вместо линейного интерполирования определяем оператор:

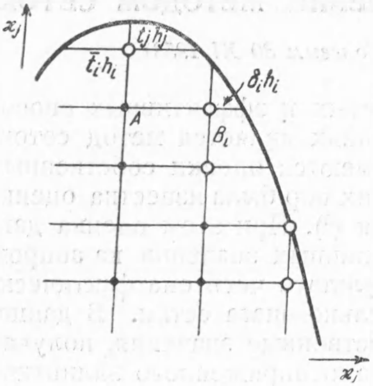

Рис. 1

$$L_h u^{(h)}+\lambda^{(h)}u^{(h)}\equiv\sum_{i=1}^{m}(a_i(x_i+ t_ih_i/2)\,u_{x_i}^{(h)})_{\bar{x}_i}-(a-\lambda^{(h)})\,u^{(h)}=0, \qquad (3)$$

где $$(a_i(x_i+t_ih_i/2)\,u_{x_i}^{(h)})_{\bar{x}_i}=$$

$$=\frac{2a_i(x_i-\bar{t}_ih_i/2)}{\bar{t}_i(t_i+\bar{t}_i)h_i^2}u^{(h)}(x_i-\bar{t}_ih_i)+\frac{2a_i(x_i+t_ih_i/2)}{t_i(t_i+\bar{t}_i)h_i^2}u^{(h)}(x_i+t_ih_i)-$$

$$-\frac{\bar{t}_ia_i(x_i+t_ih_i/2)+t_ia_i(x_i-\bar{t}_ih_i/2)}{t_i\bar{t}_i(t_i+\bar{t}_i)h_i^2}u^{(h)};\qquad 0<t_i,\ \bar{t}_i\leqslant 1.$$

2. Задача (2) сводится к вариационной задаче о минимуме конечно-разностного аналога интеграла Дирихле

$$\prod_{\tau=1}^{m}h_\tau\sum\cdots\sum\Big[\sum_{i=1}^{m}(1+\delta_i)\,a_i(x_i+h_i/2)\,v_{x_i}^{(h)^2}+av^{(h)^2}\Big]$$

при условии $\prod\limits_{\tau=1}^{m}h_\tau\sum\ldots\sum v^{(h)^2}=1$, где $v^{(h)}$ — любая, тождественно не равная нулю, система вещественных чисел, удовлетворяющая на Γ_h соотношению $v_B^{(h)}=\frac{\delta_i}{1+\delta_i}v_A^{(h)}$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$.

В случае решения исходной задачи без сноса граничных значений для некоторых областей путем соответствующего выбора положительных коэффициентов $\sigma_i(t_1,\ \ldots,\ t_m)$ можно установить связь с вариационной задачей о минимуме суммы

$$\prod h_\tau\sum\cdots\sum\sum\sigma_ia_i(x_i+t_ih_i/2)\,v_{x_i}^{(h)^2}$$

при условии

$$2^{-m}\prod_{\tau=1}^{m}h_\tau\sum\cdots\sum\prod_{i=1}^{m}(1+t_i)\,v^{(h)^2}=1,$$

где $v^{(h)}$ — любая система чисел, равная нулю в узлах, лежащих на Γ. Например, при решении задачи о собственных значениях со сносом граничных значений на аппроксимирующий ступенчатый контур следует для всех точек положить $\sigma_i=t_i=1$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$ и связь аппроксимирующей задачи с вариационной очевидна. Но эта связь имеет место не только, когда все $t_i=1$. Так, на рис. 2 показана простейшая область, когда при любой сетке t_2, соответствующие части границы KE, всегда меньше 1. Однако, если продифференцировать сумму

$$h_1h_2\sum\sum\Big[\frac{1+t_2}{2}a_1\Big(x_1+\frac{h_1}{2},\,x_2\Big)v_x^{(h)2}+t_2a_2\Big(x_1,x_2+\frac{t_2h_2}{2}\Big)v_{x_2}^{(h)2}-$$
$$-\lambda^{(h)}\frac{1+t_2}{2}v^{(h)^2}\Big]$$

по значению функции $v^{(h)}$ в точке $A(x_1,\,x_2)$, то в качестве уравнения Эйлера получим уравнение (3).

3. Предположения, сделанные относительно коэффициентов a_i, a и границы Γ, обеспечивают [3] ограниченность в $\overline{Q}$ производных от собственных функций вплоть до 4-го порядка.

Имеет место (с точностью до величин высшего порядка малости относительно h) оценка

$$\left|(\lambda_p^{(h)}-\lambda_q)\prod_{\tau=1}^{m}h_\tau\sum\cdots\sum u_qu_p^{(h)}\right|\leqslant \tag{4}$$

$$\leqslant\frac{h^2}{24}\,(\max_i T_{i3}+M_3\sqrt{\lambda_p^{(h)}\,2\max_{i,\,x\in Q}a_i})+H^{2-\varepsilon}B,$$

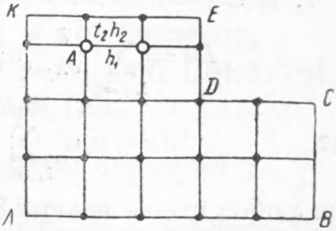

Рис. 2. ED иррационально; AB, CB и DC рациональны

где $\lambda_p^{(h)}(u_p^{(h)})$ и $\lambda_q(u_q)$ суть p-е и q-е собственные значения (функции) задач (2) и (1),

соотв.; $h=\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}h_i^2\right\}^{1/2}$; $H=\max\limits_i h_i$; $B=4M_2(m-1)m^{1/2\,(3-\varepsilon)}(r+D)^{m-2}\times$ $\times r^{-2(m-1)}\max\limits_i a_i$; M_j — максимум модулей j-х производных от функции u_q в Q; T_{ij} — максимум модулей j-х производных от функции $a_i\,\partial u_q/\partial x_i$ в Q; ε — любое положительное число; D — диаметр области Q; r — радиус шара, которым можно коснуться любой точки поверхности Γ, при этом шар должен целиком находиться вне области Q.

4. Из сходимости в среднем $u_p^{(h)}$, доказываемой при помощи теоремы вложения [4] и полноты системы собственных функций $\{u_q\}$, $q=1,\,2,\,\ldots$ задачи (1) можно показать, аналогично [1], что выражение $\Pi h_\tau\Sigma\cdots\Sigma u_qu_p^{(h)}$, рассматриваемое как коэффициент Фурье в разложении u_q по $u_p^{(h)}$, при достаточно малых $h_1,\,\ldots,\,h_m$, по крайней мере для одного индекса q, отлично от нуля. Для этого индекса $\lambda_p^{(h)}\to\lambda_q$ вместе с $h^{2-\varepsilon}$. Пусть $\lambda_i^{(h)}\to\lambda_i$, $i=1,2,\,\ldots\,,k$, вместе с $h^{2-\varepsilon}$, а $\lambda_{k+1}^{(h)}\to\lambda_j$, где $j>k+1$. Тогда следующие за $\lambda_{k+1}^{(h)}$ собственные значения тем более не могут стремиться к λ_{k+1}. Получается противоречие с обобщением на рассматриваемый случай теоремы Л. А. Люстерника [5], согласно которой в сколь угодно малой окрестности каждого, в частности λ_{k+1}, собственного значения имеется по крайней мере одно $\lambda_\mu^{(h)}$. Следовательно, имеет место оценка:

$$|\lambda_p-\lambda_p^{(h)}|\leqslant\frac{h^2}{24}\,(M_3\sqrt{\lambda_p^{(h)}}\,\sqrt{2\max a_i}+\max T_{i3})+H^{2-\varepsilon}B. \tag{5}$$

5. При решении задачи (1) без сноса граничных значений в случае, если соответствующая аппроксимирующая задача сводится к вариационной, имеет место при достаточно малых $h_1,\,\ldots\,,\,h_m$ оценка

$$|\lambda_p-\lambda_p^{(h)}|\leqslant\frac{h^2}{24}\,(\max_i T_{i,3}+M_3\sqrt{\lambda_p^{(h)}\,2\max_{i,\,x\in Q}a_i})+$$
$$+h^{2-\varepsilon}\frac{(2^{m+2}-1)\,m^{3/2}\,(m-1)\,(r+D)^{m-2}}{r^{2(m-1)}\,2^m}\max_i T_{i,1}\,, \tag{6}$$

6. Если аппроксимирующая задача не сводится к вариационной, то граничные значения сносим на Γ_h. При использовании из ([6]) оценки погрешности в λ_p, возникшей при этом сносе, имеет место оценка:

$$|\lambda_p - \lambda_p^{(h)}| \leqslant h\,(mM_1^2 + M^2)\,A + \frac{h^2}{24}\,(\max_i T_{i,3} + M_3 \sqrt{\lambda_p^{(h)}}\,\sqrt{2\max a_i});$$

$$M = \max_{x\in Q} |u_p|; \qquad A = \max_{i,\,x\in Q} a_i,$$

где первое слагаемое справа зависит исключительно от аппроксимации границы. При этом второе слагаемое справа в (6), возникшее от нарушения симметричности оператора L_h в точках, лежащих вблизи границы, естественно, пропадает.

7. В случае более общего самосопряженного оператора

$$Lu \equiv \sum_{i,\,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - au; \qquad u = 0 \text{ на } \Gamma,$$

где

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{m} \xi^2, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0$$

для любых вещественных $\xi_1, \ldots \xi_m$, оценка собственных значений имеет только первый порядок относительно h:

$$|\lambda_p - \lambda_p^{(h)}| \leqslant HA\,(m^2M_1^2 + M) + H\frac{m^2}{2}\left(AM_1\sqrt{\frac{2}{\alpha}\lambda_p^{(h)}} + \max_{i,\,j} T_{ij,1}\right),$$

где $T_{ij,1}$ — максимум модулей производных от $a_{ij}\,\partial u_p/\partial x_j$.

8. Примечания. А. До сих пор мы предполагали, что λ является простым собственным значением. Пусть λ имеет кратность k. Рассуждением, аналогичным рассуждению, применяемому Л. А. Люстерником при доказательстве сходимости $\lambda_p^{(h)}$ к λ_p в случае решения со сносом граничных значений, можно показать, что в сколь угодно малой окрестности λ имеется столько собственных значений $\lambda^{(h)}$, что их общая кратность равна k. Этим сводится случай кратных собственных значений к рассмотренному.

Б. Повысить порядок оценок (5) — (6), вообще говоря, нельзя, как это видно в случае оператора Лапласа с нулем на границе квадрата со стороной, равной π:

$$\lambda - \lambda^{(h)} = (k^2 + l^2) - \left[\left(\frac{\sin(kh/2)}{h/2}\right)^2 + \left(\frac{\sin(lh/2)}{h/2}\right)^2\right] = \frac{k^4 + l^4}{12}h^2 + O(h^4).$$

В. Для получения более быстрой сходимости собственных значений $\lambda^{(h)}$ к λ (именно, сходимости вместе с h^τ, где $\tau > 2$), следует более точно аппроксимировать производные.

Г. Если взять вместо $(a_i(x_i + h_i/2)\,u_{x_i}^{(h)})_{x_i}$ вторые разностные отношения вида $(a_i u_{x_i}^{(h)})_{x_i}$ или $(a_i(x_i + h_i)\,u_{x_i}^{(h)})_{x_i}$, то оценки (5) — (6) будут только порядка h.

Д. В случае неравномерности шага, хотя бы по одному направлению, оценки собственных значений во всех случаях имеют порядок не выше h.

Поступило
27 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Bücker, Math. Zs., **51**, 423 (1948). [2] L. Collatz, Deutsche Mathematik. **3**, 200 (1938). [3] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953. [4] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. [5] Л. А. Люстерник, ДАН, **91**, № 6 (1953). [6] Л. А. Люстерник, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, **20** (1947).