Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. И. ПЛОТКИН

О НИЛЬГРУППАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 XII 1953)

Как обычно, через $[x, y]$ будем обозначать коммутатор пары элементов группы $\mathfrak{G}$: $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Группу $\mathfrak{G}$ мы будем называть нильгруппой, если для любой пары ее элементов найдется такой номер k, что

$$[\underbrace{\ldots[[x, y],\ y], \ldots y}_{k \text{ раз}}] = e.$$

Нильгруппы (часто под другими названиями) изучались различными авторами ([1,2] и др.).

Основной результат настоящей заметки состоит в доказательстве теоремы, утверждающей, что всякая нильгруппа без кручения, удовлетворяющая условию минимальности для изолированных подгрупп, нильпотентна. Эта теорема является аналогом известной теоремы Энгеля для нильалгебр.

Теорема 1. *Всякая нильгруппа без кручения является R-группой.*

Доказательство. Применим централизаторный критерий R-группы ([3]).

Пусть a и g — два элемента группы, причем $a^m \in \mathfrak{Z}(g)$. Требуется доказать, что $a \in \mathfrak{Z}(g)$. Составим последовательность:

$$g_1 = [g, a],\quad g_2 = [g_1, a], \ldots, g_i = [g_{i-1}, a], \ldots \qquad (*)$$

Очевидно, a^m перестановочен с каждым g_i. Так как $\mathfrak{G}$ — нильгруппа, то найдется такое первое n, что $g_n = e$. Допустим, что $n > 1$. Тогда $g_n = [g_{n-1}, a] = e$, но $g_{n-1} = [g_{n-2}, a] \neq e$. Так как $g_{n-1} = g_{n-2}^{-1}a^{-1}g_{n-2}a$, то a перестановочен и с $g_{n-2}^{-1}a^{-1}g_{n-2} = (g_{n-2}^{-1}ag_{n-2})^{-1}$. Отсюда подгруппа $A = \{a, g_{n-2}^{-1}ag_{n-2}\}$ коммутативна. Из перестановочности a^m с g_{n-1} следует, что $g_{n-2}^{-1}a^m g_{n-2} = (g_{n-2}^{-1}ag_{n-2})^m = a^m$, причем это равенство имеет место в коммутативной группе без кручения A. Отсюда $g_{n-2}^{-1}ag_{n-2} = a$. Но тогда $[g_{n-2}, a] = g_{n-1} = e$, и получилось противоречие с тем, что $n > 1$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если нильгруппа обладает возрастающим нормальным разрешимым рядом (любой, бесконечной или конечной, длины), то такая группа локально нильпотентна.*

Доказательство этой теоремы получается почти дословным повторением доказательства основной теоремы из работы ([6]), и мы его опускаем *.

* Теорема 2 сообщалась нами на Всесоюзной алгебраической конференции в 1951 г. В 1953 г. появилась работа ([1]), в которой доказывается частный случай этой теоремы.

Приведем далее ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — нильгруппа без кручения. Тогда нормализатор любой ее изолированной нильпотентной подгруппы будет изолирован.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа, удовлетворяющая условиям леммы и $N(H)$ — ее нормализатор. Пусть $g^n \in N(H)$. Рассмотрим подгруппу $F=\{g, H\}$. Подгруппа $\{g^n, H\}$ разрешима, и по теореме 2 она локально нильпотентна. Ее изолятор $I(g^n, H)$ также локально нильпотентен (7). Но так как $F \subset I(g^n, H)$, то и F — локально нильпотентная группа. Поэтому (5) $g \in N(H)$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — нильгруппа и H — ее подгруппа. Тогда найдется такой элемент $g \bar{\in} H$, что $g^{-1}Hg \cap H \neq E$.*

Доказательство. Пусть $h \in H$ и $f \bar{\in} H$. Составим последовательность типа (*): $f=f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$ Найдем такое первое k, что $f_k \in H$, но $f_{k-1} \bar{\in} H$. Такое k найдется, так как при некотором n $f_n = e \in H$. Так как $f_k = f_{k-1}^{-1}h^{-1}f_{k-1}h \in H$, то $f_{k-1}^{-1}h^{-1}f_{k-1} \in H$. Элемент f_{k-1} можно принять за g: $f_{k-1} \bar{\in} H$ и $f_{k-1}^{-1}h^{-1}f_{k-1} \in H \cap f_{k-1}^{-1}Hf_{k-1}$.

Возрастающий ряд изолированных подгрупп будем называть плотным, если между соседними членами этого ряда нет изолированных подгрупп. Легко видеть, что если в нильпотентной группе без кручения задан конечный плотный ряд изолированных подгрупп, то длина этого ряда совпадает с рациональным рангом группы. Далее, если $\mathfrak{G}$ — нильпотентная группа без кручения конечного рационального ранга, то через $r(\mathfrak{G})$ будем обозначать ее рациональный ранг.

Заметим еще, что если группа без кручения удовлетворяет условию минимальности для изолированных подгрупп, то этим свойством обладают все ее изолированные подгруппы и фактор-группы без кручения.

Лемма 3. *Если нильгруппа без кручения $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию минимальности для изолированных подгрупп и обладает плотным рядом изолированных подгрупп конечной длины n, то она является нильпотентной группой рационального ранга n.*

Доказательство. Применим индукцию по n. Лемма верна для групп, удовлетворяющих условиям леммы и обладающих плотным рядом изолированных подгрупп длины 1, так как плотные R-группы коммутативны. Пусть она уже доказана для всех групп, обладающих плотным рядом изолированных подгрупп с длиной меньшей чем n и удовлетворяющих остальным условиям леммы. Проведем в $\mathfrak{G}$ плотный ряд изолированных подгрупп длины n:

$$E=\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_{n-1} \subset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}.$$

По предположению, $\mathfrak{G}_{n-1}$ нильпотентна. Вначале допустим, что $N(\mathfrak{G}_{n-1}) = \mathfrak{G}_{n-1}$, и покажем, что это невозможно. Найдем по лемме 2 такой элемент g, что подгруппа $F=g^{-1}\mathfrak{G}_{n-1}g$ имеет с $\mathfrak{G}_{n-1}$ нетривиальное пересечение D_1 и не содержится в $\mathfrak{G}_{n-1}$. Если D_1 не инвариантна в $\mathfrak{G}$, то будем строить ряд подгрупп $D_1, D_2, \ldots, D_i, \ldots$ такой, что все D_i — собственные изолированные подгруппы в $\mathfrak{G}_{n-1}$ и, кроме того, $N(D_i) \neq \mathfrak{G}$; $N(D_i) \not\subset \mathfrak{G}_{n-1}$.

Делаем это так. Пусть D_i уже построена и она еще неинвариантная в $\mathfrak{G}$ собственная изолированная подгруппа в $\mathfrak{G}_{n-1}$. Обозначим $D_{i+1} = N(D_i) \cap \mathfrak{G}_{n-1}$. Так как $\mathfrak{G}_{n-1}$ нильпотентна, то D_{i+1} — строго бо́льшая, чем D_i, собственная изолированная подгруппа в $\mathfrak{G}_{n-1}$. Покажем, что $N(D_{i+1}) \not\subset \mathfrak{G}_{n-1}$. Пусть A — минимальная среди содержащих D_{i+1} изолированных подгрупп в $N(D_i)$. Так как $r(D_{i+1}) < n-1$, то A обладает плотным рядом изолированных подгрупп с длиной $\leqslant n-1$. Значит, A нильпотентна и D_{i+1} инвариантна в A (5). Поэтому в $N(D_i)$ есть элементы, перестановочные с D_{i+1} и не лежащие в D_{i+1}. Они не лежат и в $\mathfrak{G}_{n-1}$. Отсюда $N(D_{i+1}) \not\subset \mathfrak{G}_{n-1}$. Так как $\mathfrak{G}_{n-1}$ — нильпотентная группа конечного рационального ранга, то процесс построения D_i не может продолжаться неограниченно, и некоторая подгруппа D_k окажется инвариантной в $\mathfrak{G}$. Но тогда группа $\mathfrak{G}/D_k$ удовлетворяет всем условиям леммы и обладает плотным рядом изолированных подгрупп с длиной меньшей n. Значит, $\mathfrak{G}/D_k$ нильпотентна, а $\mathfrak{G}_{n-1}/D_k$ — инвариантная подгруппа в $\mathfrak{G}/D_k$. Но это невозможно, так как $\mathfrak{G}_{n-1}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$.

Следовательно, $N(\mathfrak{G}_{n-1})$ строго больше, чем $\mathfrak{G}_{n-1}$, и, значит, просто $N(\mathfrak{G}_{n-1}) = \mathfrak{G}$. Дальнейшее ясно, так как отсюда следует, что $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа.

Теорема 3. *Нильгруппа без кручения, удовлетворяющая условию минимальности для изолированных подгрупп, является нильпотентной группой.*

Доказательство. Из условия минимальности вытекает, что $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим плотным рядом изолированных подгрупп:

$$E = \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_\alpha \subset \ldots \subset \mathfrak{G}.$$

Покажем, что этот ряд оборвется на конечном месте. Допустим, что это не так. Тогда существует $\mathfrak{G}_\omega$, где ω — первое предельное число. По лемме 3 все $\mathfrak{G}_n$ нильпотентны и, значит, $\mathfrak{G}_\omega$ — локально нильпотентна. Но известно([4]), что локально нильпотентные группы без кручения с условием минимальности для изолированных подгрупп имеют конечный рациональный ранг. Таким образом, существование $\mathfrak{G}_\omega$ противоречит условию минимальности для изолированных подгрупп в $\mathfrak{G}$. Поэтому для некоторого n $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$, и теорема доказана.

Поступило
10 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. W. Gruenberg, Proc. Cambr. Phil. Soc., **49**, part 3, 377 (1953). [2] П. Г. Конторович, Матем. сборн., **28** (70) : 1, 79 (1951). [3] П. Г. Конторович, Матем. сборн., **22** (64) : 1, 79 (1948). [4] А. И. Мальцев, Матем. сборн., **28** (70) : 3, 567 (1951). [5] Б. И. Плоткин, ДАН, **73**, № 4, 655 (1950). [6] Б. И. Плоткин, ДАН, **76**, № 5, 639 (1951). [7] Б. И. Плоткин, Матем. сборн., **30** (72) : 1, 197 (1952).