

И. П. МЫСОВСКИХ

О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta u = k(x, y) u^2$

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 XII 1953)

В работе доказывается существование решения следующей граничной задачи:

Найти функцию u , удовлетворяющую в области D дифференциальному уравнению

$$\Delta u = k(x, y) u^2 \quad (1)$$

и условию на границе S

$$u|_S = f(s). \quad (2)$$

Относительно области D предполагается, что она ограничена, односвязна и имеет достаточно гладкую границу S . Предполагается, что $k(x, y)$ положительная и непрерывно дифференцируемая в замкнутой области \bar{D} функция; $f(s)$ непрерывна, неотрицательна и отлична от тождественного нуля на S .

Обозначим через \tilde{u} гармоническую в области D функцию, удовлетворяющую граничному условию (2). Если ввести новую неизвестную функцию $v = u - \tilde{u}$, то для нее граничная задача будет формулироваться так:

Найти функцию v , удовлетворяющую в области D дифференциальному уравнению

$$\Delta v = k(x, y) (v + \tilde{u})^2 \quad (3)$$

и граничному условию

$$v|_S = 0. \quad (4)$$

Такая задача равносильна интегральному уравнению

$$v(x, y) + \iint_D G(x, y; \xi, \eta) k(\xi, \eta) [v(\xi, \eta) + \tilde{u}(\xi, \eta)]^2 d\xi d\eta = 0, \quad (5)$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина оператора Лапласа для области D .

Интегральное уравнение (5) будем решать методом Ньютона, взяв за начальное приближение $v_0 \equiv 0$. Докажем сходимость последовательных приближений, определяемых методом Ньютона, не прибегая к общим теоремам о сходимости этого метода (1), которые непосредственно в нашем случае неприменимы (не предполагается малость области D или граничных условий).

Последовательные приближения в методе Ньютона определяются из линейных интегральных уравнений;

$$\begin{aligned} & v_k(x, y) - v_{k-1}(x, y) + \\ & + \iint_D G(x, y; \xi, \eta) k(\xi, \eta) 2 [v_{k-1}(\xi, \eta) + \tilde{u}(\xi, \eta)] [v_k(\xi, \eta) - v_{k-1}(\xi, \eta)]^2 d\xi d\eta = \\ & = -v_{k-1}(x, y) - \iint_D G(x, y; \xi, \eta) k(\xi, \eta) [v_{k-1}(\xi, \eta) + \tilde{u}(\xi, \eta)]^2 d\xi d\eta \\ & (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

Докажем, что последовательность непрерывных функций $\{v_k(x, y)\}$ равномерно в области D сходится к функции $v(x, y)$. Тогда ясно, что $v(x, y)$ — решение интегрального уравнения (5) и, следовательно, граничной задачи (3), (4). Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу в соотношении (6) при $k \rightarrow \infty$.

Полагая в (6) $k = 1$, получим

$$\begin{aligned} v_1(x, y) + \iint_D G(x, y; \xi, \eta) k(\xi, \eta) 2\tilde{u}(\xi, \eta) v_1(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = - \iint_D G(x, y; \xi, \eta) k(\xi, \eta) \tilde{u}^2(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (7)$$

Интегральные уравнения (6) при $k \geq 2$ преобразуем следующим образом: первое слагаемое правой части уравнения с номером $k = n$ ($-v_{n-1}(x, y)$) заменим его выражением из уравнения с номером $k = n - 1$. После преобразования уравнения (6) запишутся так:

$$\begin{aligned} & v_n(x, y) - v_{n-1}(x, y) + \\ & + \iint_D G(x, y; \xi, \eta) k(\xi, \eta) 2 [v_{n-1}(\xi, \eta) + \tilde{u}(\xi, \eta)] [v_n(\xi, \eta) - v_{n-1}(\xi, \eta)] d\xi d\eta = \\ & = - \iint_D G(x, y; \xi, \eta) k(\xi, \eta) [v_{n-1}(\xi, \eta) - v_{n-2}(\xi, \eta)]^2 d\xi d\eta \quad (n = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (8)$$

При доказательстве сходимости последовательности $\{v_n(x, y)\}$ нам удобнее иметь дело не с интегральными уравнениями (7), (8), а с равносильными им граничными задачами. Интегральное уравнение (7) равносильно задаче:

$$\Delta v_1 - 2k\tilde{u}v_1 = k\tilde{u}^2; \quad (9)$$

$$v_1|_S = 0; \quad (10)$$

уравнения (8) равносильны граничным задачам:

$$\Delta (v_n - v_{n-1}) - 2k(v_{n-1} + \tilde{u})(v_n - v_{n-1}) = k(v_{n-1} - v_{n-2})^2, \quad (11)$$

$$(v_n - v_{n-1})|_S = 0 \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (12)$$

Будем пользоваться следующим фактом⁽²⁾. Обозначим через u_1 и u_2 решения граничных задач с нулевыми условиями на границе для уравнений

$$\Delta u_1 - p_1(x, y) u_1 = f_1(x, y), \quad (13)$$

$$\Delta u_2 - p_2(x, y) u_2 = f_2(x, y), \quad (14)$$

где p_i, f_i ($i = 1, 2$) непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют неравенствам

$$p_i(x, y) > 0, \quad f_i(x, y) \geq 0; \quad (15)$$

$$p_1(x, y) \leq p_2(x, y), \quad f_1(x, y) \geq f_2(x, y) \quad (16)$$

в области \bar{D} . Тогда справедливо неравенство

$$|u_2(x, y)| \leq |u_1(x, y)|.$$

При выполнении неравенств (15) $u_1 \leq 0$ в D .

Рассмотрим граничную задачу (9), (10). Так как $f(s) \geq 0$ и отлична от тождественного нуля, то u положительна в D и, следовательно, для уравнения (9) выполнены неравенства (15). Имеем $v_1 \leq 0$. Установим неравенство

$$|v_1| \leq \frac{\tilde{u}}{2}. \quad (17)$$

Перепишем уравнение (9) в виде

$$\Delta v_1 = 2k\tilde{u} \left(v_1 + \frac{\tilde{u}}{2} \right) \quad (9^1)$$

и докажем, что сумма $v_1 + \tilde{u}/2$ неотрицательна. Если бы эта сумма была отрицательна хоть в одной точке из D (на границе области D она неотрицательна), то нашлась бы точка $(x_0, y_0) \in D$, в которой $v_1 + \tilde{u}/2$ достигает отрицательного минимума, и мы имели бы в этой точке

$$\Delta \left[v_1 + \frac{\tilde{u}}{2} \right] = \Delta v_1 \geq 0,$$

что противоречит (9¹). Неравенство (17) установлено.

Рассмотрим граничную задачу (11), (12) при $n = 2$:

$$\Delta (v_2 - v_1) - 2k(v_1 + \tilde{u})(v_2 - v_1) = kv_1^3, \quad (11^2)$$

$$(v_2 - v_1)|_S = 0. \quad (12^2)$$

Наряду с задачей (11²), (12²) рассмотрим граничную задачу для уравнения

$$\Delta V_2 - 2k \frac{\tilde{u}}{2} V_2 = k \frac{\tilde{u}^2}{4} \quad (18)$$

при нулевых граничных условиях. Ввиду неравенства (17)

$$|v_2 - v_1| \leq |V_2|. \quad (19)$$

Записывая уравнение (18) в виде

$$\Delta V_2 = k\tilde{u} \left[V_2 + \frac{\tilde{u}}{4} \right],$$

докажем, как это делалось выше, что

$$|V_2| \leq \frac{\tilde{u}}{4}. \quad (20)$$

Сопоставляя неравенства (19) и (20), получим:

$$|v_2 - v_1| \leq \frac{\tilde{u}}{4}. \quad (21)$$

Из неравенств (17) и (21) следует

$$|v_2| \leq \frac{\tilde{u}}{2} + \frac{\tilde{u}}{4} = \frac{3}{4}\tilde{u}. \quad (22)$$

Перейдем к граничной задаче (11), (12) при $n = 3$:

$$\Delta (v_3 - v_2) - 2k[v_2 + \tilde{u}](v_3 - v_2) = k(v_2 - v_1)^2; \quad (11^3)$$

$$(v_3 - v_2)|_S = 0. \quad (12^3)$$

Рассмотрим граничную задачу для уравнения

$$\Delta V_3 - 2k \frac{\tilde{u}}{4} V_3 = k \frac{\tilde{u}^2}{16}$$

при нулевых граничных условиях. На основании (21) и (22) имеем:

$$|v_3 - v_2| \leq |V_3|.$$

Как и выше, устанавливаем, что

$$|V_3| \leq \frac{\tilde{u}}{8}$$

и, следовательно,

$$|v_3 - v_2| \leq \frac{\tilde{u}}{8}.$$

Продолжая таким же образом, получим для любого n :

$$|v_n - v_{n-1}| \leq \frac{\tilde{u}}{2^n}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} |v_{n+p} - v_n| &\leq |v_{n+p} - v_{n+p-1}| + \dots + |v_{n+1} - v_n| \leq \\ &\leq \tilde{u} \left(\frac{1}{2^{n+p}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) < \frac{\tilde{u}}{2^n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ясно, что последовательность $\{v_n(x, y)\}$ сходится в \bar{D} равномерно к непрерывной функции $v(x, y)$.

Из (23), переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим оценку ошибки приближения v_n :

$$|v_n - v| \leq \frac{\tilde{u}}{2^n}. \quad (24)$$

При $n = 0$ из (24) получаем

$$|v| \leq \tilde{u},$$

поэтому для решения исходной граничной задачи (1), (2) $u = v + \tilde{u}$ выполнены неравенства: $0 \leq u \leq \tilde{u}$.

Отметим, что неотрицательное решение задачи (1), (2) единственно.

Для задачи $\Delta v = (v + 1)^2$, $v = 0$ на окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $v(0, 0)$ как угодно близко к -1 , если R достаточно большое. Отсюда вытекает, что $|v_n(0, 0) - v(0, 0)|$ как угодно близко к $\frac{1}{2^n}$ при R достаточно большом (здесь $\tilde{u} = 1$), и в этом смысле оценка (24) является точной.

Результат верен в случае любого числа измерений. Мы ограничились случаем двух измерений лишь для упрощения записи. Разумеется, все остается в силе для уравнения $u'' = k(x)u^2$.

Способ доказательства можно распространить на уравнения более общего вида $\Delta u = f(x, y, u)$, если на функции $f, \partial f / \partial u, \partial^2 f / \partial u^2$ наложить ограничения типа неравенств.

Поступило
10 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. В. Канторович, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 28, 104 (1949).
² L. Bieberbach, Math. Ann., 77, Н. 2, 173 (1916).