Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 6

МАТЕМАТИКА

Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ЭЛЛИПСОИДА В НЕЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XII 1953)

§ 1. Геодезические линии на эллипсоидах прежде всего определяются на основании теоремы о том, что материальная точка при отсутствии внешних сил должна двигаться на поверхности по геодезической кривой.

Полагая $m=1$ и $k=1$ (что можно всегда сделать при надлежащем выборе единиц массы и длины), мы будем иметь уравнение движения материальной точки по поверхности

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

в пространстве Лобачевского в следующей форме:

$$\begin{aligned} x'' &= v^2x + H_x,\\ y'' &= v^2y + H_y,\\ z'' &= v^2z + H_z,\\ u'' &= v^2u + H_u; \end{aligned} \tag{2}$$

между вейерштрассовыми координатами имеется соотношение

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -1, \tag{3}$$

а H_x, H_y, H_z, H_u имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} H_x &= \lambda\left[\Phi_{xu}\frac{1-x^2}{u} + \Phi_{yu}\frac{xy}{u} + \Phi_{zu}\frac{xz}{u}\right],\\ H_y &= \lambda\left[\Phi_{xu}\frac{yx}{u} + \Phi_{yu}\frac{1+y^2}{u} + \Phi_{zu}\frac{yz}{u}\right],\\ H_z &= \lambda\left[\Phi_{\ u}\frac{zx}{u} + \Phi_{yu}\frac{zy}{u} + \Phi_{zu}\frac{1+z^2}{u}\right],\\ H_u &= \lambda\left[\Phi_{xu}x + \Phi_{yu}y + \Phi_{zu}z\right], \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{xu} &= x\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial x}\\ \Phi_{vu} &= y\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial y},\\ \Phi_{zu} &= z\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \tag{5}$$

Если уравнение эллипсоида имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = u^2, \tag{6}$$

то уравнения (2) обращаются в следующие:

$$\begin{aligned} x'' &= v^2x + 2A\lambda x, \\ y'' &= v^2y + 2B\lambda y, \\ z'' &= v^2z + 2C\lambda z, \\ u'' &= v^2u + 2\lambda u. \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение (6) после двойного дифференцирования дает:

$$A\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + B\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + C\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \\ + Ax\frac{d^2x}{dt^2} + By\frac{d^2y}{dt^2} + Cz\frac{d^2z}{dt^2} - u\frac{d^2u}{dt^2} = 0.$$

Подставляя же сюда вместо x'', y'', z'' их значения из (7), получаем:

$$2\lambda\,[A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - u^2] = -\,[Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - u'^2]. \tag{8}$$

Но, с другой стороны, умножая последовательно уравнения (7) на Ax', By', Cz', $-u'$ и складывая, имеем:

$$Ax'x'' + By'y'' + Cz'z'' - u'u'' = 2\lambda\,[A^2xx' + B^2yy' + C^2zz' - uu']. \tag{9}$$

Разделяя же почленно (9) на (8), имеем:

$$\frac{A^2xx' + B^2yy' + C^2zz' - uu'}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - u^2} = -\frac{Ax'x'' + By'y'' + Cz'z'' - u'u''}{Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - u'^2}, \tag{10}$$

интегрирование же дает

$$(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - u^2)(Ax'^2 + By'^2 + Cy'^2 - u'^2) = \text{const}. \tag{11}$$

Уравнение касательной плоскости к эллипсоиду имеет вид

$$AxX + ByY + CzZ - uU = 0.$$

Расстояние δ точки (0, 0, 0, 1) от этой плоскости определяется формулой:

$$\operatorname{sh}\delta = \frac{u}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - u^2}}. \tag{12}$$

Далее находим уравнение плоскости, проходящей через начало координат (т. е. центр эллипсоида) и перпендикулярной к касательной к геодезической, имея в виду уравнения касательной:

$$\begin{aligned} \delta_{zu}X - \delta_{xu}Z &= \delta_{zx}U, \\ \delta_{zu}Y - \delta_{yu}Z &= \delta_{zy}U. \end{aligned} \tag{13}$$

Искомое уравнение плоскости имеет вид:

$$\delta_{xu}X + \delta_{yu}Y + \delta_{zu}Z = 0. \tag{14}$$

Уравнения же

$$\frac{X}{\delta_{xu}} = \frac{Y}{\delta_{yu}} = \frac{Z}{\delta_{zu}} = \rho \tag{15}$$

представляют уравнения прямой, проходящей через M и перпендикулярной к (14).

Подставляя в уравнение эллипсоида (6) и (3) значение (x, y, z) из (15), имеем:

$$\rho^2(A\delta_{xu}^2 + B\delta_{yu}^2 + C\delta_{zu}^2) = U^2, \tag{16}$$

$$\rho^2(\delta_{xu}^2 + \delta_{yu}^2 + \delta_{zu}^2) = U^2 - 1. \tag{17}$$

Но уравнение (3) и другие дают после ряда преобразований

$$\delta_{xu}^2 + \delta_{yu}^2 + \delta_{zu}^2 = 1, \tag{18}$$

$$A\delta_{xu}^2 + B\delta_{yu}^2 + C\delta_{zu}^2 = (Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - u'^2)\, u^2. \tag{19}$$

Из (16)

$$\rho = \frac{U}{u\sqrt{Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - u'^2}}$$

и, используя (17) и (19), получаем

$$\frac{U}{\sqrt{U^2 - 1}} = u\sqrt{Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - u'^2}.$$

Если $U = \operatorname{ch} r$, где r — расстояние от центра, то

$$\operatorname{cth} r = u\sqrt{Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - u'^2}.$$

Наконец, из (11) и (12) получаем

$$\operatorname{sh}\delta \operatorname{th} r = \text{const}.$$

В этом и состоит обобщение известной теоремы Иохимсталя о том, что для геодезической кривой поверхности второго порядка

$$\delta r = \text{const}.$$

Конечно, таким же образом рассуждения проводятся и для гиперболоидов.

§ 2. В вопросе об уравнении геодезических линий на эллипсоиде мы ограничиваемся только указанием на возможность вывода (аналогичного проводимому в евклидовом пространстве) из аналога лагранжевых уравнений 1-го рода уравнений второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_u} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

где q_k — независимые параметры, $q_k' = dq_k/dt$; $T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2 - k^2u'^2)$; U — потенциал, для которого $\frac{X}{u} = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{Y}{u} = \frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{Z}{u} = \frac{\partial U}{\partial z}$, и отсюда обычными приемами получаются канонические уравнения Гамильтона:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad H = T - U,$$

где $p_k - \partial T/\partial q_k'$.

Остается в силе весь ход вычислений в якобиевском методе определения геодезических кривых поверхностей второго порядка с употреблением эллиптических координат q_i, являющихся решениями уравнения

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - \frac{u^2}{d-\lambda} = 0.$$

В результате получаем уравнение геодезических линий в форме:

$$\int\frac{q_1 dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} + \int\frac{q_2 dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} = 2\alpha',$$

$$\int\frac{q_1^2 dq_1}{\sqrt{R(q_1)}} + \int\frac{q_2^2 dq_2}{\sqrt{R(q_2)}} = 4(t - t_0),$$

$$Q(q) = (a-q)(b-q)(c-q)(d-q)(\alpha + {}^1/_2\, hq)\, q,$$

так что решение и для неевклидова пространства зависит от ультраэллиптических интегралов 1-го класса.

Поступило
11 IV 1953