Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 6

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XII 1953)

В одном из предыдущих сообщений [1] мы указали ряд случаев, когда обратная краевая задача допускает эффективное решение. Множество этих случаев значительно расширится, если воспользоваться приводимым ниже методом, и в особенности, если его сочетать с приемами, указанными в [1]. По своей основной идее этот метод непосредственно примыкает к методу, указанному еще в нашем первом сообщении [2] по этим вопросам (методу центральной массы).

1. Пусть S — некоторая струна, натянутая единичной силой между концами $x=0$ и $x=L$ $(\leqslant\infty)$; $M(x)$ при $0<x<L$ — масса открытого справа отрезка $[0,x)$ струны S, а $M(0)=0$ (см. [1,3]). Предполагая, что левый конец струны может свободно скользить по направлению, перпендикулярному к оси X, приложим в момент $t=0$ к этому концу единичную силу F. Она вызывет движение этого конца $y=\Phi(t)$, которое будет вполне определенным (независимо от условий закрепления правого конца струны $x=L$) по крайней мере в интервале $0\leqslant t<2T$, где $T=t(L)$ $(\leqslant\infty)$, а

$$t(x)=\int\limits_0^x \sqrt{M'(\xi)}\,d\xi \quad (0\leqslant x\leqslant L) \tag{1}$$

есть время пробега возникшей прямой волны от начала $x=0$ до точки x. В случае, когда время (полного) пробега T конечно, указанное движение будет вполне определенным и при $t\geqslant 2T$, если момент инерции распределения масс на струне относительно начала будет бесконечным (см. [3]). Более того, если считать возможным только такое движение, при котором $\Phi(t)=O(t^2)$ при $t\to\infty$, то это движение будет вполне определенным тогда и только тогда, когда $LM(L)=\infty$ $(M(L)=\lim M(x)$ при $x\to L)$.

Если же $LM(L)<\infty$, то движение будет определенным лишь при задании условия закрепления струны S на ее правом конце. Функцию $\Phi(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$, задающую движение начала струны во всем промежутке времени $[0,\infty)$ при дополнительном условии (в случае $LM(L)<\infty$) неподвижного закрепления правого конца, назовем главной переходной функцией струны S.

Длина L и функция $M(x)$ $(0\leqslant x<L)$ вполне определяются заданием главной переходной функции $\Phi(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$, более того, в случае $T<\infty$ они определяются заданием $\Phi(t)$ в каком-либо интервале $[0,2A)$, где $A>T$. Если же переходная функция $\Phi(t)$ задана в интервале $[0,2A)$, где $A\leqslant T$, то функция $M(x)$ будет этим определяться на интервале $[0,x_A)$, где x_A обозначает ближайшую точку x, которую достигает за время A прямая волна, побежавшая от точки $x=0$ (таким образом, x_A — наименьший корень уравнения $t(x)=A$).

Главная переходная функция $\Phi(t)$ допускает в интервале $[0,\infty)$ представление:

$$\Phi(t)=\int_0^\infty \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,t}{\lambda}\,d\tau(\lambda), \tag{2}$$

где $\tau(\lambda)=\tau(\lambda-0)$ $(0\leqslant\lambda<\infty;\ \ \tau(0)=0)$ — неубывающая функция, являющаяся главной спектральной функцией струны S (см. ([1])). Она является единственной непрерывной слева неубывающей функцией, аннулирующейся при $\lambda=0$, дающей представление (2) функции $\Phi(t)$ в интервале $[0,2A)$, где $A=\infty$, если $T=\infty$, и A — какое-либо число, большее T, если $T<\infty$.

Если же $A<T$ или $A=T$ при $T<\infty$, то совокупность всех неубывающих функций $\tau(\lambda)=\tau(\lambda-0)\,(0\leqslant\lambda<\infty;\ \tau(0)=0)$, дающих представление (2) функции $\Phi(t)$ в интервале $[0,2A)$, будет совпадать с совокупностью всех спектральных функций с неотрицательным спектром отрезка $[0,x_A)$ струны S.

Простое сочетание результатов наших предыдущих сообщений ([3,4]) приводит к следующему предложению.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывная функция $\Phi(t)$ $(0\leqslant t<2A;\ A\leqslant\infty)$ совпадала на интервале $[0,2A)$ с главной переходной функцией некоторой струны S, необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале она допускала представление* (2) *с некоторой неубывающей функцией $\tau(\lambda)$. Последнее условие эквивалентно двум требованиям:* 1) $\Phi(0)=0$ *и* 2) *ядро $L(s,t)=\Phi(s)+\Phi(t)-\Phi(|s-t|)$ $(0\leqslant s,t<2A)$ является положительно-определенным в квадрате $(0\leqslant s,\ t<2A)$.*

Из теоремы 1 без труда получается:

Теорема 2. *Пусть задана функция $\Phi(t)$ $(0\leqslant t<2A)$, имеющая абсолютно непрерывную производную в каждом интервале $[0,2a)$, где $a<A$. Для того чтобы она совпадала на интервале $[0,2A)$ с главной переходной функцией некоторой струны S, необходимо и достаточно, чтобы при любом $a<A$ $(a>0)$ и любой непрерывной функции $q(s)$ $(-a\leqslant s\leqslant a)$ выполнялось неравенство*:

$$2\Phi'(0)\int_{-a}^{a}q^2(s)\,ds+\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\Phi''(|s-t|)\,q(s)\,q(t)\,ds\,dt\geqslant 0. \tag{3}$$

Заметим, что условие (3) влечет неравенство $\Phi'(0)\geqslant 0$. Теорема 2 является шагом вперед в сравнении с теоремой 6 из ([5]), в которой рассматривается лишь случай $\Phi'(0)>0$ и вместо условия (3) указано более сложное.

2. Как и в ([1,3]), обозначим через $\varphi(x;\lambda)$ решение уравнения $dy'+\lambda y\,dM=0$, удовлетворяющее условиям $\varphi(0;\lambda)=1$, $\varphi'(+0;\lambda)=-M(+0)\lambda$.

Для случая, когда переходная функция $\Phi(t)$ струны S имеет в интервале $[0,2T)$ производную $\Phi'(t)$, абсолютно непрерывную в каждом интервале $[0,2a]$ $(a<T)$, имеет место:

Теорема 3. *Если при некотором $a<T$ $(a>0)$ интегральное уравнение*

$$2\,\Phi'(0)\,q(t)+\int_{-a}^{a}\Phi''(|t-s|)\,q(s)\,ds=1 \tag{4}$$

имеет интегрируемое решение $q=q(t;a)$, то оно единственно и при любом комплексном λ

$$\int_{-a}^{a} q(t;a)\cos\lambda t\,dt = \int_{0}^{x_a} \varphi(x;\lambda^2)\,dM(x) = -\frac{1}{\lambda^2}\varphi'(x_a-0;\lambda^2) \qquad (5)$$

и, в частности:

$$\int_{-a}^{a} q(t;a)\,dt = M(x_a). \qquad (6)$$

Если $\Phi'(0)>0$, *то уравнение* (4) *при любом* $a<T$ $(a>0)$ *будет иметь абсолютно непрерывное решение* $q(t;a)$.

Более того, если $\Phi'(0)>0$, то $M[t]=M(x_t)$ и $\varphi'(x_t;\lambda)$ будут иметь в каждом интервале $[0,a]$ абсолютно непрерывные производные по аргументу t, причем $M'[t]>0$ $(0\leqslant t<T)$. Если допускать равенство $M'[0]=0$, то указанными свойствами функции $M[t]$ и $\varphi'(x_t;\lambda)$ могут часто обладать и в случае, когда $\Phi'(0)=0$. С другой стороны, если они обладают этими свойствами, то в уравнении $dy'+\lambda y\,dM=0$ можно будет перейти от переменной x к переменной t, пользуясь тем, что $x_t=x(t)$. Это позволит утверждать, что дифференциальная система:

$$\frac{d}{dt}\left(p\frac{dy}{dt}\right)+\lambda^2 py=0; \quad y(0;\lambda)=1; \quad \lim_{t\downarrow 0}\left(p\frac{dy}{dt}\right)=0, \qquad (7)$$

где $p(t)=dM[t]/dt$, имеет при любом комплексном λ решение

$$\varphi[t;\lambda^2]=\varphi(x_t;\lambda^2)=\frac{1}{p(t)}\frac{d}{dt}\int_{-t}^{t} q(s;t)\cos\lambda s\,ds. \qquad (8)$$

3. Примеры. а) Пусть $K(t)$ обозначает одну из следующих шести функций:

$$1)\ \ln(A/2t)\ \ (0<t<2A); \qquad 2)\ t^{-h}\ \ (0<t<\infty;\ 0<h<1);$$

$$3)\ \ln\left(\sin\frac{A}{2}\Big/2\sin\frac{t}{2}\right)\ \ (0<t<2A;\ 0<A\leqslant\pi);$$

$$4)\ \ln\left(\operatorname{sh}\frac{A}{2}\Big/2\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right)\ \ (0<t<2A);$$

$$5)\ \ln\operatorname{cth}(t/4)\ \ (0<t<\infty); \qquad 6)\ 1-t\ \ (0<t<2A).$$

Можно показать, что в случаях 1) — 5) соответствующее ядро $K(|s-t|)$ в соответствующем интервале является положительно-определенным. Следовательно, при любом $v\geqslant 0$ функция $\Phi(t)$, определяемая равенствами $\Phi''(t)=K(t)$, $\Phi(0)=0$, $\Phi'(0)=v$, будет переходной функцией некоторой струны. В случае 6) теорема 2 позволяет утверждать, что последнее будет иметь место, если $v\geqslant 0$ и $(A-1)\operatorname{th}(A/\sqrt{v})\leqslant\sqrt{v}$. Положим $v=0$ для случаев 1) — 5), а для случая 6) пусть $(A-1)\operatorname{th}(A/\sqrt{v})=\sqrt{v}$.

Решениями $q(t;a)$ $(-a\leqslant t\leqslant a)$ соответствующих интегральных уравнений (4) (первого рода для случаев 1) — 5)) будут:

$$1)\ \pi^{-1}M[a](a^2-t^2)^{-1/2}; \qquad 2)\ \pi^{-1}\cos(\pi h/2)(a^2-t^2)^{\frac{h-1}{2}};$$

$$3)\ \pi^{-1}M[a](2\cos t-2\cos a)^{-1/2}\cos(t/2);$$

$$4)\ \pi^{-1}M[a]\ \ (2\operatorname{ch}a-2\operatorname{ch}t)^{-1/2}\ \operatorname{ch}(t/2);$$

$$5)\ \pi^{-1}Q^{-1}_{-1/2}(a)(2\operatorname{ch}a-2\operatorname{ch}t)^{-1/2}; \qquad 6)\ M[a]\operatorname{ch}(t/\sqrt{v})/2\sqrt{v}\operatorname{sh}(a/\sqrt{v}).$$

Здесь $M[a]$ обозначает $M(x_a)$. Для $M[t]=M(x_t)$, соответственно, будем иметь следующие выражения:

$$1)\ 1/\ln(A/t); \qquad 2)\ \pi^{-1/2}\left[\Gamma\left(\frac{1+h}{2}\right)\Big/\Gamma\left(1+\frac{h}{2}\right)\right]\cos(\pi h/2)\,t^h;$$

$$3)\ 1 \,/\, \ln\left(\sin\frac{A}{2} \Big/ \sin\frac{t}{2}\right); \quad 4)\ 1 \,/\, \ln\left(\operatorname{sh}\frac{A}{2} \Big/ \operatorname{sh}\frac{t}{2}\right);$$

$$5)\ P_{-1/2}(t) \,/\, Q_{-1/2}(t); \quad 6)\ 1 \,/\, [1 - a + \sqrt{v}\operatorname{cth}(a/\sqrt{v})].$$

Если для каждого из случаев выписать соответствующую дифференциальную систему (7), то ее решение найдется по формуле (8). Приведем это решение для случаев 1) — 5):

$$1)\ t\ln^2\frac{A}{t}\,\frac{d}{dt}\left[J_0(\lambda t)/\ln\frac{A}{t}\right]; \ 2)\ 2^{h/2}\Gamma(1+h/2)\,\frac{d}{dt}\,[t^{h/2}J_{h/2}(\lambda t)]\,/\,ht^{h-1};$$

$$3)\ \frac{d}{2dt}\{M[P_\lambda(\cos t) + P_{\lambda-1}(\cos t)]\} \Big/ \frac{dM}{dt};$$

$$4)\ \frac{d}{2dt}\{M[P_{i\lambda}(\operatorname{ch} t) + P_{i\lambda-1}(\operatorname{ch} t)]\} \Big/ \frac{dM}{dt};$$

$$5)\ \frac{d}{dt}\,[P_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} t)\,/\,Q_{-1/2}(\operatorname{ch} t)]\,/\,Q^2_{-1/2}(\operatorname{ch} t)\operatorname{sh} t.$$

Здесь $J_\nu(t)$ — цилиндрическая функция; $P_\nu(t)$, $Q_\nu(t)$ — функции Лежандра первого и второго рода индекса ν.

Так как $M[t] \to \infty$ при $t \to \infty$ в случаях 2), 5) и при $t \to A$ в случаях 1), 3), 4), 6), то $T = \infty$ в случаях 2), 5) и $T = A$ в случаях 1), 3), 4), 6). В четырех последних случаях функция $K(t) = \Phi''(t)$ однозначно продолжается (доопределяется) для $t > A$ при условии положительной определенности продолженного ядра $K(|s-t|)$ $(-\infty < s,\ t < \infty)$. При этом продолжении функция $K(|t|)$ оказывается степановской почти-периодической функцией, спектр которой совпадает с множеством полюсов легко вычисляемого коэффициента динамической податливости соответствующей струны.

Если в случае 6) положить $v = 0$, то соответствующее уравнение (4) первого рода будет иметь решение: $q(s; a) = [\delta(t-a) + \delta(t+a)] : 2(1-a)$ ($\delta(t)$ — функция Дирака), $M[t] = 1/(1-t)$; $M(x) = (1-3x)^{-1/3}$ и максимальное значение A, при котором ядро $K(|s-t|) = 1 - |s-t|$ $(-A < s, t < A)$ будет положительно-определенным, равно 1. В этом случае $M(+0) = 1$, так что струна S будет нести на левом конце сосредоточенную массу $m = 1$.

б) Пусть $R(\lambda) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)\,/\,(\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n) = P(\lambda)/Q(\lambda)$, причем $R(\lambda) > 0$ при $\lambda \geqslant 0$. Определим спектральную функцию $\tau(\lambda)$ равенством: $d\tau/d\lambda = R(\lambda)/\pi\sqrt{\lambda}$ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$. Построив затем по формуле (2) функцию $\Phi(t)$, мы получим решение уравнения (4) по формуле $q(t; a) = Q(-D^2)\chi(t; a)$ $(D = d/dt)$, где χ — четное решение уравнения $P(-D^2)\chi = 1/2$, удовлетворяющее в точках $t = \pm a$ граничным условиям, определяемым многочленом $Q(\lambda)$ ([6],[7]).

Учитывая соотношение (8), мы приходим к выводу, что дифференциальная система (7), имеющая спектральную функцию указанного выше типа, может быть эффективно построена и (что самое замечательное!) *решение этой системы при любом* λ *найдется в виде рациональных функций от показательных функций от* t (см. пример в ([1])).

Поступило
11 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, **93**, № 4 (1953). [2] М. Г. Крейн, ДАН, **76**, № 1 (1951). [3] М. Г. Крейн, ДАН, **87**, № 6 (1952). [4] М. Г. Крейн, ДАН, **45**, № 3 и № 4 (1944). [5] М. Г. Крейн, ДАН, **82**, № 5 (1952). [6] L. A. Zadeh, J. R. Ragazzini, J. Appl. Phys., **21**, № 7 (1950). [7] В. В. Солодовников, Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, 1952.