Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. И. АХИЕЗЕР

О НАИЛУЧШЕМ ВЗВЕШЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НА ВСЕЙ ОСИ ПОСРЕДСТВОМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 XII 1953)

Настоящая заметка примыкает к моей работе ([1]) и имеет целью обобщение данного там критерия на случай наилучшего взвешенного приближения при помощи целых функций конечной степени. Мы задаемся непрерывной функцией $\Phi(x) \geqslant 1$ $(-\infty < x < \infty)$ и под уклонением функции $\psi(x)$ от функции $\varphi(x)$ понимаем величину

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{|\varphi(x)-\psi(x)|}{\Phi(x)} = \|\varphi - \psi\|_\Phi .$$

Функцию $\Phi(x)$ мы будем предполагать майорантой квазиконечного (и, в частности, конечного) роста по введенной С. Н. Бернштейном ([2]) терминологии. Это значит, что при любом $p>0$ существует такая целая (трансцендентная) функция $\Phi_q(z)$ степени $q=q(p)$ (для майоранты конечного роста $q=p$), что для всякой целой функции $g(z)$ степени $\leqslant p$ неравенство

$$|g(x)| \leqslant \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1}$$

влечет в каждой точке z полуплоскости $\mathfrak{I}z \geqslant 0$ (соотв. $\mathfrak{I}z \leqslant 0$) неравенство

$$|g(z)| \leqslant |\Phi_q(z)| \quad (\text{соотв. } |g(z)| \leqslant |\Phi_q(\bar{z})|). \tag{2}$$

Простейшей майорантой и притом конечного роста является константа: если $\Phi(x) = M = \text{const}$, то $q=p$ и $\Phi_q(z) = Me^{-ipz}$.

Теорема. *Пусть $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ — вещественная непрерывная функция, а $G_p(x)$ — некоторая вещественная целая функция степени $\leqslant p$. Если отношение $\dfrac{f(x)-G_p(x)}{\Phi(x)}$ обладает на оси $-\infty < x < \infty$ чебышевским множеством * и если это множество (назовем его $\mathfrak{M}$) является множеством корней вещественной целой функции конечной степени $\Omega(z)$, для которой $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y\Phi_q(iy)}{\Omega(iy)} = 0$, то $G_p(x)$ среди всех целых функций степени $\leqslant p$ наименее уклоняется от $f(x)$ в смысле данного выше определения.*

* Напомним определение чебышевского множества, данное в ([1]). Пусть вещественная функция $\varphi(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ принимает хотя бы по одному разу оба значения $\pm L_\varphi$ $(L_\varphi = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x)|)$; чебышевским множеством функции $\varphi(x)$ называется последовательность (если она существует) точек $\ldots < \xi_j < \xi_{j+1} < \ldots$, в которых $\varphi(x)$ поочередно принимает значения L_φ, $-L_\varphi$ и которая не является частью какой-нибудь последовательности этого рода.

Доказательство. Допуская противное, примем, что существует вещественная целая функция $G_p^*(x)$ степени $\leqslant p$, для которой

$$\|f - G_p^*\|_\Phi < \|f - G_p\|_\Phi = L, \tag{3}$$

и введем разность $F(x) = G_p(x) - G_p^*(x)$. Если чебышевское множество $\mathfrak{M}$ есть

$$\ldots < x_j < x_{j+1} < \ldots, \tag{4}$$

то на основании (3) функция $F(x)$ в точках (4) отлична от нуля и имеет значения чередующихся знаков. Следовательно, между каждыми двумя точками x_j, x_{j+1} функция $F(x)$ имеет корень y_j. Принимая для простоты, что точка $x = 0$ не принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, можем функцию $\Omega(z)$ представить в виде

$$\Omega(z) = e^{\alpha z} \lim_{R \to \infty} \prod_{|x_j| < R} \left(1 - \frac{z}{x_j}\right),$$

где α — вещественная константа, которая может иметь произвольное значение. Эту константу α выберем так, чтобы индикаторная диаграмма функции $\Omega(z)$ содержала отрезок мнимой оси $[-ip, ip]$. Возможность такого выбора константы α вытекает из следующих соображений: в неравенстве (1) в качестве $g(x)$ может быть взята функция e^{-ipx}, поэтому при любом $y > 0$ $e^{py} \leqslant |\Phi_q(iy)|$ и, значит,

$$\lim_{\pm y \to \infty} \frac{y e^{p|y|}}{\Omega(\pm iy)} = 0,$$

так что индикаторная диаграмма функции $\Omega(z)$ содержит отрезок длины $2p$, параллельный мнимой оси и симметричный относительно вещественной оси в силу вещественности функции $\Omega(z)$, а при изменении α этот отрезок перемещается параллельно мнимой оси. В силу указанного выбора α

$$h_\Omega(\theta) \geqslant p\,|\sin\theta|. \tag{5}$$

Теперь построим с тем же α функцию

$$\omega(z) = e^{\alpha z} \lim_{R \to \infty} \prod_{|y_j| < R} \left(1 - \frac{z}{y_j}\right),$$

принимая снова для простоты, что ни одно из чисел y_j не равняется нулю, и положим

$$F(z) = \omega(z)\,\varphi(z), \tag{6}$$

где $\varphi(z)$ есть также целая функция конечной степени. Мы докажем, что $\varphi(z)$ есть тождественный нуль; тем самым теорема будет доказана.

Отношение $\psi(z) = \omega(z)/\Omega(z)$ есть функция, мнимая часть которой сохраняет постоянный знак в полуплоскости $\mathfrak{J}z > 0$ и противоположный знак в полуплоскости $\mathfrak{J}z < 0$. Поэтому каждая из величин $\psi(z)/z$, $1/z\psi(z)$ равномерно стремится к конечному пределу при $|z| \to \infty$ в каждом из углов $|\pi/2 - \arg z| < \delta$, $|-\pi/2 - \arg z| < \delta$ $(\delta < \pi/2)$, откуда, между прочим, следует, что $h_\omega(\theta) = h_\Omega(\theta)$.

Далее, поскольку $|F(x)| < 2L\Phi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, то по свойству майоранты

$$|F(z)| < 2L\,|\Phi_q(z)|, \quad |F(\bar{z})| < 2L\,|\Phi_q(z)| \quad (\mathfrak{J}z > 0) \tag{7}$$

и (см. [3])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|F(x)|}{1 + x^2}\,dx < 2LC_p, \tag{8}$$

где $C_p < \infty$ зависит только от p и $\Phi(x)$.

Из (6) и (7) вытекает, что

$$|\varphi(\pm iy)| < \frac{2L\,|\Phi_q(iy)|}{|\omega(iy)|} = \frac{2L}{y\,|\psi(iy)|}\,\frac{y\,|\Phi_q(iy)|}{|\Omega(iy)|} \quad (y > 0),$$

т. е. $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi(\pm iy) = 0$. Поэтому, на основании одной теоремы М. Картрайт, вне некоторых исключительных кружков при $r \to \infty$

$$\frac{\ln|\varphi(re^{i\theta})|}{r} = \begin{cases} k_1|\cos\theta| + o(1) & (|\theta| < \pi/2), \\ k_2|\cos\theta| + o(1) & (|\pi - \theta| < \pi/2), \end{cases}$$

где k_1, k_2 — постоянные, сумма которых больше или равна нулю, и, подобным образом, в силу (8), также вне некоторых исключительных кружков, при $r \to \infty$

$$\frac{\ln|F(re^{i\theta})|}{r} = \sigma|\sin\theta| + o(1) \quad (\theta \neq 0,\ \pi),$$

где σ — степень функции $F(z)$. На основании всего сказанного

$$\sigma|\sin\theta| = h_\Omega(0) + k_1|\cos\theta| \quad (|\theta| \leqslant \pi/2);$$
$$\sigma|\sin\theta| = h_\Omega(\theta) + k_2|\cos\theta| \quad (|\pi - \theta| \leqslant \pi/2).$$

Отсюда и из (5) следует, что $\sigma \geqslant p$, а так как $\sigma \leqslant p$, то $\sigma = p$. Следовательно, $k_1 = k_2 = 0$ и, значит, $\varphi(z)$ — функция нулевой степени. Но $\lim\limits_{y\to\infty}\varphi(\pm iy) = 0$. Поэтому на основании теоремы С. Н. Бернштейна $\varphi(z) \equiv 0$, и теорема доказана.

Для иллюстрации теоремы положим $\Phi(x) = |H(x)| \geqslant 1$ $(-\infty < x < \infty)$, где $H(z)$ — целая функция конечной степени. Так как $\Phi(x)$ есть по условию майоранта, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|H(x)|}{1 + x^2}\,dx < \infty.$$

Вводя положительную на вещественной оси целую функцию конечной степени $H(z)\overline{H}(z)$ и используя теорему заметки [4], можем построить целую функцию конечной степени

$$g(z) = e^{az+b}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_m + i\beta_m}\right)e^{\alpha_m z/(\alpha_m^2+\beta_m^2)}$$

(a и b вещественны, $\beta_m > 0$); пусть ее степень σ, для которой

$$|g(x)| = |H(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Функция $g(z)$ не имеет корней в полуплоскости $\Im z \leqslant 0$ и, кроме того, $h_g(-\pi/2) \geqslant h_g(\pi/2)$. По терминологии Б. Я. Левина [5] $g(z)$ есть функция класса P. Тем же свойством обладает функция $g(z)e^{i\tau z}$ при $\tau > 0$, степень которой равна $\sigma + \tau$. В силу доказанной Б. Я. Левиным [5] теоремы, мы можем при $\Phi(x) = |g(x)|$ положить

$$\Phi_q(z) = \begin{cases} \overline{g}(z), & \text{если } p \leqslant \sigma; \\ \overline{g}(z)\,e^{-i(p-\sigma)z}, & \text{если } p \geqslant \sigma, \end{cases}$$

так что

$$q = q(p) = \begin{cases} \sigma & (p \leqslant \sigma); \\ p & (p \geqslant \sigma). \end{cases}$$

Возьмем теперь функцию

$$\frac{A+Bx}{x^2+k^2}=\frac{D}{x-ki}+\frac{\overline{D}}{x+ki} \quad (k>0).$$

Наша теорема позволяет найти погрешность наилучшего приближения этой функции при весе $|H(x)|$ при помощи целой функции степени $p \geqslant \sigma$. С этой целью напишем тождество

$$\frac{L}{2}\left\{\frac{x+ki}{x-ki}\sqrt{\frac{\overline{g}(x)}{g(x)}}\, e^{-i(p-\sigma)x+i\delta}+\frac{x-ki}{x+ki}\sqrt{\frac{g(x)}{\overline{g}(x)}}\, e^{i(p-\sigma)x-i\delta}\right\}=$$

$$=\frac{1}{|H(x)|}\left\{\frac{D}{x-ki}+\frac{\overline{D}}{x+ki}-G_p(x)\right\}=\varphi(x),$$

где

$$L>0, \quad D=kiL\overline{g}(ik)\, e^{(p-\sigma)k+i\delta}.$$

Функция

$$\frac{z+ki}{z-ki}\sqrt{\frac{\overline{g}(z)}{g(z)}}\, e^{-i(p-\sigma)z+i\delta}$$

имеет в полуплоскости $\Im z>0$ модуль >1, а в полуплоскости $\Im z<0$ модуль <1 и рассмотрение ее аргумента на вещественной оси показывает, что функция $\varphi(x)$ обладает на оси $-\infty<x<\infty$ чебышевским множеством, которое совпадает с множеством корней целой функции

$$(z+ki)^2\overline{g}(z)\, e^{-i(p-\sigma)z+i\delta}-(z-ki)^2 g(z)\, e^{i(p-\sigma)z-i\delta}=\Omega(z).$$

Как выше было указано, поскольку $p \geqslant \sigma$, $\Phi_q(z)=e^{-i(p-\sigma)z}\overline{g}(z)$. Значит,

$$\frac{y\Phi_q(iy)}{\Omega(iy)}=\frac{y\overline{g}(iy)\, e^{(p-\sigma)y}}{(y-k)^2 g(iy)\, e^{-(p-\sigma)y-i\delta}-(y+k)^2\overline{g}(iy)\, e^{(p-\sigma)y+i\delta}}$$

стремится к нулю при $y\to\infty$, и наша теорема применима. Поэтому упомянутая погрешность наилучшего приближения равна

$$A_{p,\,|H(x)|}\left\{\frac{A+Bx}{x^2+k^2}\right\}=L=\frac{|D|\, e^{-(p-\sigma)k}}{k\,|\overline{g}(ik)|}.$$

Если учесть, что при $y=\Im z>0$

$$\ln|\overline{g}(z)|=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|g(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt+\sigma y,$$

то этот результат может быть представлен в виде

$$A_{p,\,|H(x)|}\left\{\frac{A+Bx}{x^2+k^2}\right\}=\frac{\sqrt{A^2+B^2k^2}}{2k^2}\, e^{-pk}\, e^{-\frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|H(t)|}{t^2+k^2}dt}.$$

При $H(t)\equiv 1$ получаем известную формулу С. Н. Бернштейна ([6]).

Поступило
14 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер, Матем. сборн., **31**: 2, 415 (1952). [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, **65**, 117 (1949). [3] Н. И. Ахиезер, ДАН, **93**, № 6 (1953). [4] Н. И. Ахиезер, ДАН, **63**, № 5 (1948). [5] Б. Я. Левин, Изв. АН СССР, сер. матем., 14 : 1, 45 (1950). [6] С. Н. Бернштейн, ДАН, **51**, № 7 (1946).