

И. С. ГОНОРОВСКИЙ

## О ФЛУКТУАЦИОННОМ ХАРАКТЕРЕ УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 8 XII 1953)

При рассмотрении механизма возникновения колебаний в электронных автогенераторах в качестве первоначальной возмущающей силы чаще всего принимают электрические флуктуации. Хотя начальные условия для генерации могут существенно зависеть от переходных процессов, сопровождающих включение источников питания, роль флуктуаций сохраняется в тех случаях, когда крутизна нарастания питающих напряжений достаточно мала. Подобные условия могут иметь место и при импульсной работе, особенно на сверхвысоких частотах. Интересно поэтому рассмотреть некоторые особенности установления колебаний при допущении, что начальные условия определяются исключительно флуктуациями.

Известно, что на начальной стадии нарастания колебания при запуске от достаточно малых амплитуд поведение любого автогенератора, независимо от его схемы и устройства, может быть описано линейным дифференциальным уравнением. Для консервативного автогенератора с одной степенью свободы решение такого уравнения имеет вид

$$a(t) = A_0 e^{\beta t} \sin(\omega_0 t + \theta), \quad (1)$$

где  $\theta$  и  $A_0$  определяются начальными условиями. Допустим, что нелинейность характеристики электронного прибора начинает проявляться при значениях огибающей  $A_1 = A_0 e^{\beta t}$  во много раз больших, чем начальная амплитуда  $A_0$ . Такие соотношения как раз характерны для автогенератора, в котором начальные условия определяются флуктуациями. Тогда продолжительность  $t_1$  «линейного» режима системы, составляющая подавляющую часть общего времени, необходимого для достижения амплитудой своего стационарного значения, может рассматриваться как «задержка» импульса. При запуске автогенератора от флуктуаций длительность задержки является случайной величиной, флуктуирующей при импульсной работе около своего наивероятнейшего значения.

Для определения разброса моментов  $t_1$  рассмотрим воздействие флуктуационной электродвижущей силы типа «белый шум» на автогенератор, который представим в виде обобщенного колебательного контура, содержащего наряду с собственным сопротивлением потерь  $r_k$  еще отрицательное сопротивление  $r_r$ , обусловленное влиянием электронного прибора. Исходя из оговоренной выше линейности системы на начальном этапе запуска генератора и полагая, что шумовая эдс

$e_{\Phi}(t)$  действует на контур начиная с момента  $t=0$ , можем написать следующее линейное дифференциальное уравнение для тока в контуре:

$$L \frac{di}{dt} + (r_k - r_l) i + \frac{1}{C} \int i dt = e_{\Phi}(t). \quad (2)$$

Воспользуемся представлением шумовой эдс в виде ряда Фурье:

$$e_{\Phi}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t + \psi_n\right), \quad (3)$$

где  $\psi_n$  — случайная равновероятная в пределах  $0$  и  $2\pi$  фаза;  $T$  — произвольный достаточно большой отрезок времени, выбранный в качестве периода;  $E_n$  — амплитуда  $n$ -й гармоники, связанная с энергетическим спектром  $W(f)$  шума выражением

$$E_n = \sqrt{\frac{2W(f)}{T}}. \quad (4)$$

Подставляя (3) в правую часть уравнения (2) и используя упрощения, вытекающие из условий  $\beta \ll \omega_0$ ,  $\omega_0^2 \approx 1/LC$ , где  $\omega_0$  — частота собственных колебаний контура, можно получить следующее выражение для тока в контуре (при  $t > 0$ ):

$$i(t) = \sin \omega_0 t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{|z_n|} \left[ \cos(\Delta \omega_n t + \xi_n) - \frac{\omega_n}{\omega_0} e^{\beta t} \cos \xi_n \right] + \\ + \cos \omega_0 t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{|z_n|} [\sin(\Delta \omega_n t + \xi_n) - e^{\beta t} \sin \xi_n]. \quad (5)$$

В этом выражении  $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$ ,  $\Delta \omega_n = \omega_n - \omega_0$ ,  $\xi_n = \psi_n - \varphi_n$ ,

$$\varphi_n = \arctg \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{r_s}, \quad |z_n| = \sqrt{r_s^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

Первые слагаемые в квадратных скобках выражения (5) определяют флуктуационный ток в контуре в виде стационарного случайного процесса с нормальным законом распределения и с дисперсией, равной

$$\psi_{\Phi} = \overline{i_{ct}^2(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^2}{2|z_n|^2}.$$

Учитывая соотношение (4) и совершая предельный переход  $\Delta f = 1/T \rightarrow 0$ , получаем

$$\psi_{\Phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W(f_n)}{|z_n|^2} \Delta f \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{W(f)}{|z(\omega)|^2} df. \quad (6)$$

Дисперсия  $\psi_{\Phi}$  совпадает со средним квадратом тока, который установился бы под действием эдс  $e_{\Phi}(t)$  в контуре с положительным затуханием, равным по абсолютной величине отрицательному затуханию  $\beta$ .

Вторые слагаемые в квадратных скобках выражения (5) определяют «переходный» флуктуационный ток. Так как, по условию,  $\beta > 0$ , то интенсивность этого тока при сделанном допущении о линейности системы нарастает неограниченно.

Рассмотрим поведение огибающей тока при значениях  $t$  настолько больших, что первыми слагаемыми в выражении (5) можно пренебрегать (хотя амплитуда еще не достигла уровня, при котором нелинейность системы существенно влияет на развитие процесса). Тогда

вместо (5) можно исходить из следующего выражения для переходной части флуктуационного тока:

$$i_{\text{пер}}(t) = -e^{\beta t} \{I_s \sin \omega_0 t + I_c \cos \omega_0 t\} = -R e^{\beta t} \sin(\omega_0 t + \theta), \quad (7)$$

где

$$I_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_0}{\omega_n} \frac{E_n}{|z_n|} \cos \xi_n, \quad (8)$$

$$I_c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{|z_n|} \sin \xi_n, \quad (9)$$

$$R = \sqrt{I_s^2 + I_c^2}. \quad (10)$$

В выражении (7) огибающая  $R e^{\beta t}$  и фаза  $\theta$  являются случайными величинами. Для выяснения статистических свойств этих величин используем следующие обстоятельства: а) случайные величины  $I_s$  и  $I_c$ , являющиеся суммами большого числа независимых слагаемых, обладают, в соответствии с центральной предельной теоремой, нормальным законом распределения; б)  $I_s$  и  $I_c$  статистически независимы, так как  $\overline{I_s I_c} = 0$ ; в) дисперсии  $\psi_s$  и  $\psi_c$ , соответственно, величин  $I_s$  и  $I_c$  одинаковы и совпадают с дисперсией  $\psi_\phi$ , определяемой выражением (6).

Действительно, в соответствии с определениями (8) и (9), имеем:

$$\psi_s = \overline{I_s^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_0^2}{\omega_n^2} \frac{E_n^2}{|z_n|^2} \rightarrow \int_0^{\infty} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \frac{W(f)}{|z(\omega)|^2} df, \quad (11)$$

$$\psi_c = \overline{I_c^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^2}{|z_n|^2} \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{W(f)}{|z(\omega)|^2} df. \quad (12)$$

Совпадение выражений (12) и (6) очевидно. Тождественность интегралов в правых частях (11) и (12) можно доказать, подставив  $|z(\omega)| = \sqrt{(r_k - r_r)^2 + (\omega L - 1/\omega c)^2}$ . Таким образом, выполнив интегрирование, получаем

$$\psi_s = \psi_c = \frac{W(f) \omega_0}{4(r_k - r_r)^2 Q}, \quad (13)$$

где  $Q$  — добротность контура.

Перечисленные свойства случайных величин  $I_s$  и  $I_c$  приводят к следующему дифференциальному закону распределения для величины  $R$ , определяемой формулой (10):

$$p(R) = \frac{R}{\psi_\phi} e^{-R^2/2\psi_\phi}. \quad (14)$$

\* Подразумевается усреднение «по системам». То же самое относится и к определению  $\psi_s$  и  $\psi_c$ .

Для огибающей, отсчитываемой в фиксированный момент  $t_1$ , соответственно:

$$p_1(Re^{\beta t}) = p_1(A_{t_1}) = \frac{A_{t_1}}{\psi_t} e^{-A_{t_1}^2/2\psi_t}, \quad (15)$$

где

$$\psi_t = \psi_{c,t} e^{2\beta t} \quad (16)$$

можно рассматривать как дисперсию флуктуационного тока, отсчитываемого при многократном запуске генератора спустя время  $t_1$  после начала каждого цикла.

Основываясь на выражении (15), можно решить обратную задачу, именно найти плотность вероятностей для моментов  $t_1$ , отвечающих заданному уровню огибающей  $A_{t_1} = Re^{\beta t}$ .

Имеем

$$\beta t_1 = \ln \frac{A_{t_1}}{R}, \quad p_2(\beta t_1) = \frac{p(R)}{|d(\beta t)/dR|} = 2K^2 \exp[-(2\beta t + K^2 e^{-2\beta t})]. \quad (17)$$

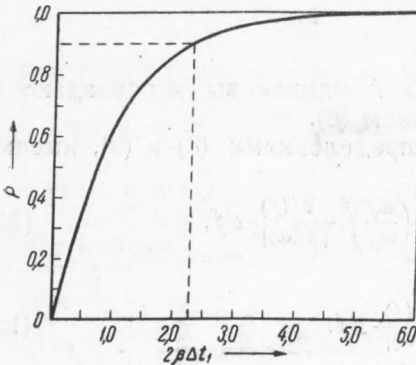
Здесь принято обозначение

$$K = \frac{A_{t_1}}{\sqrt{2} V \psi_\Phi}. \quad (18)$$

Графики  $p_2(\beta t)$  для различных значений  $K$  представлены на рис. 1. При значениях безразмерного времени  $\beta t_0$ , определяемых равенством

$$\beta t_0 = \ln K, \quad (19)$$

функция  $p_2(\beta t)$  проходит через максимальное значение, равное  $2/e$  (независимо от  $K$ ). Беря это значение  $t_0$  за исходное и обозначая  $t = t_0 + \Delta t$ , можно из выражения (17) исключить  $K$ :



$$p_3(\beta \Delta t) = 2 \exp[-(2\beta \Delta t + e^{-2\beta \Delta t})]. \quad (2)$$

Интегрируя это выражение в пределах  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$ , найдем интегральное распределение

$$P(t_0 - \Delta t_1 < t < t_0 + \Delta t_2) = \exp[-e^{-2\beta \Delta t_2}] - \exp[-e^{2\beta \Delta t_1}]. \quad (21)$$

Рис. 2

На рис. 2 представлен график функции  $P$  при  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ , определяющей вероятность попадания моментов  $t$  в интервал  $2\Delta t_1$ , симметричный относительно наиболее вероятного момента  $t_0$ . Из этого графика видно, что вероятности 90% соответствует интервал  $2\Delta t_1 = 2,3/\beta$ . Можно поэтому считать, что разброс задержки импульсов достигает более чем двухкратной величины временной постоянной контура  $\tau_s = 1/\beta$ , причем последняя определяется с учетом отрицательного сопротивления, вносимого лампой в контур на начальном этапе развития колебаний. Обычно  $\tau_s$  значительно меньше, чем временная постоянная собственно контура.

Фаза нарастающего колебания, определяемая согласно (7) выражением  $\theta = \arctg \frac{I_c}{I_s}$ , является случайной величиной, равновероятной в промежутке  $0 - 2\pi$ .

Поступило  
27 XI 1953