Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 5

ГЕОФИЗИКА

А. А. ПИВОВАРОВ

РАСЧЕТ ЗИМНЕГО ХОДА ТЕМПЕРАТУРЫ ВОДЫ ВОДОХРАНИЛИЩ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 4 XII 1953)

При проектировании и эксплуатации гидроэлектростанций существенное значение имеет знание термического режима водной системы в зимний период и, главным образом, учет протяженности незамерзающего участка и перемещения ледяной кромки в нижнем бьефе. В свою очередь, эти явления в значительной мере определяются термическим режимом верхнего бьефа, т. е. водохранилища. Поэтому расчет температуры воды водохранилища, помимо самостоятельного значения, представляет большой интерес для решения задачи о термическом режиме нижнего бьефа.

Процесс формирования термического режима и решение задачи о расчете температурного поля воды водохранилища для зимнего периода рассмотрены А. Г. Колесниковым [1]. Однако для практического использования полученных им расчетных зависимостей требуется предварительное определение корней сложного тригонометрического уравнения, которое решается графически. В настоящей работе мы дадим новое решение этой задачи, более удобное для практических расчетов.

Представим водохранилище глубиной l. К началу замерзания водные массы почти полностью расходуют весенне-летние запасы тепла благодаря интенсивному турбулентному перемешиванию в период осеннего охлаждения воды. Но ложе водохранилища, в силу малой теплопроводности грунта, сохраняет еще достаточное количество тепла, накопленного в период нагрева.

Начиная с момента установления сплошного ледяного покрова, который примем за начальный в данной задаче, теплоотдача с поверхности воды резко падает. На нижней границе ледяного покрова процессом ледообразования поддерживается постоянная температура воды. Можно считать, что термическое воздействие приводного слоя атмосферы проявляется лишь в изменении толщины льда. Тогда основным внешним фактором, формирующим температуру воды под ледяным покровом, остается теплообмен с грунтом ложа водохранилища. Следовательно, в течение зимнего периода будет идти постепенный подогрев воды за счет теплозапасов грунта.

Будем обозначать все величины, относящиеся к воде, индексом 1, а к грунту — индексом 2. Примем, что распространение тепла в воде по вертикали осуществляется турбулентным обменом, а по горизонтали имеют место изотермические условия. Тогда температурное поле воды определяется уравнением переноса тепла

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = k_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2}, \quad -l \leqslant z_1 \leqslant 0, \tag{1}$$

с граничными условиями: нулевая температура на поверхности соприкосновения ледяного покрова с водой

$$t_1(-l, \tau) = 0; \tag{2}$$

непрерывность температур и потоков тепла на границе раздела вода — грунт

$$t_1(0, \tau) = t_2(0, \tau); \quad c_1\rho_1 k_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial z}\right)_{z=0} = c_2\rho_2 k_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial z}\right)_{z=0}, \tag{3}$$

а также начальным условием

$$t_1(z, 0) = 0. \tag{4}$$

Задание начального условия в виде (4) вполне достаточно для инженерных расчетов, так как температурные градиенты по глубине к моменту замерзания практически отсутствуют и температура воды по абсолютной величине близка к нулю.

Температура поверхности грунта и тепловой поток от него естественно определяются из решения уравнения теплопроводности для грунта

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = k_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2}, \quad 0 < z < \infty, \tag{5}$$

с граничными условиями (3), условием ограниченности температуры на бесконечности в грунте и начальным условием

$$t_2(z, 0) = f(z). \tag{6}$$

Функция $f(z)$ характеризует теплозапас грунта к моменту ледостава и может быть определена из решения задачи о летнем термическом режиме грунта, как и в [1].

Здесь приняты следующие обозначения: k_1 — коэффициент турбулентного обмена тепла в воде; k_2 — коэффициент температуропроводности грунта; c — теплоемкость; ρ — плотность.

Принятая постановка задачи не является вполне строгой, поскольку не учитывается изменение глубины водохранилища за счет роста льда. Последнее математически настолько осложняет задачу, что трудно получить ее решение в эффективном виде.

Для решения уравнения (5) положим

$$t_2(z, \tau) = v(z, \tau) + \frac{1}{2\sqrt{\pi k_2 \tau}} \int_0^\infty \{e^{-(z-\eta)^2/4k_2\tau} + e^{-(z+\eta)^2/4k_2\tau}\} f(\eta)\, d\eta. \tag{7}$$

Тогда для функции $v(z, \tau)$ будем иметь уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = k_2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \tag{8}$$

граничные условия

$$\begin{gathered} t_1(0, \tau) = v(0, \tau) + \frac{1}{\sqrt{\pi k_2 \tau}} \int_0^\infty e^{-\eta^2/4k_2\tau} f(\eta)\, d\eta; \\ c_1\rho_1 k_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial z}\right)_{z=0} = c_2\rho_2 k_2 \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} \end{gathered} \tag{9}$$

и начальное условие

$$v(z, 0) = 0. \tag{10}$$

Решения уравнений (1) и (8), удовлетворяющие условиям (2), (4), (9) и (10), ищем операционным методом, и в результате для температурного поля воды получим выражение

$$t_1(z, \tau) = \theta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{(2n+1)\,l + z}{2\sqrt{k_1\tau}}\right) + \beta \operatorname{erf}\left(\frac{(2n+1)\,l - z}{2\sqrt{k_1\tau}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1-\beta}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{(n+1)\,2l + z}{2\sqrt{k_1\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2nl - z}{2\sqrt{k_1\tau}}\right)\right]\right\} -$$
$$- \frac{1-\beta}{2\sqrt{k_2\pi\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n \int_0^{\infty} \{ e^{-[(2l(n+1)+z)\sqrt{k_2} + \eta\sqrt{k_1}]^2/4k_1k_2\tau} -$$
$$- e^{-[(2nl-z)\sqrt{k_2} + \eta\sqrt{k_1}]^2/4k_1k_2\tau} \} f(\eta)\, d\eta, \tag{11}$$

где $\beta = \dfrac{c_1\rho_1\sqrt{k_1} - c_2\rho_2\sqrt{k_2}}{c_1\rho_1\sqrt{k_1} + c_2\rho_2\sqrt{k_2}}$.

Первый ряд полученного решения описывает влияние теплозапаса воды в момент замерзания. Величина его уменьшается с течением времени и тем быстрее, чем меньше безразмерный комплекс $k_1\tau/l^2$, который увеличивается вместе с проточностью или мелководностью водохранилищ.

Второй ряд характеризует прогрев воды подо льдом за счет теплозапасов грунта. В зависимости от глубины водохранилища, тепловых характеристик и начального распределения температур в воде и грунте процесс нагрева воды можно представить графически в виде кривой с максимумом.

Оценка быстроты сходимости рядов в решении (11) показывает, что все члены с индексом n, удовлетворяющим условию $n \geqslant 3\sqrt{k_1\tau/l^2} + z/2l$, стремятся к нулю. При любых значениях комплекса $k_1\tau/l^2$ и $\beta \leqslant 0{,}9$ первые три члена рядов в (11) дают решение для температуры воды с максимальной ошибкой меньше 10%. Для малых $k_1\tau/l^2$ или β можно ограничиться одними первыми членами, т. е. $n = 0$.

Основные количественные характеристики процесса формирования температурного поля воды и в общем случае можно получить, ограничившись одними первыми членами рядов. Нами проведена серия расчетов хода температуры воды для водохранилищ различной глубины и проточности. Результаты вычислений при $z = l/2$ показали, что при значениях коэффициента турбулентной температуропроводности $k_1 = 0{,}12$; $0{,}06$; $0{,}03$ см²/сек и глубине водохранилища $l = 4$ м время наступления максимума температуры воды оказывается равным: 10; 15; 30 сут., соответственно; при тех же значениях k_1, но $l = 8$ м максимальная температура наблюдается через 25, 55 и 130 сут.; при $l = 10$ м — через 50; 110 и больше 150 сут.

Если принять, что распространение тепла в воде осуществляется только молекулярной теплопроводностью, то в силу ее малости время наступления максимума температуры воды равно 5 мес., т. е. фактически не достигается в течение зимнего периода, даже при глубине водохранилища $l = 2$ м, что противоречит экспериментальным наблюдениям за ходом температуры воды. Следовательно, решающая роль в процессе распространения тепла и формировании температуры воды в водохранилищах принадлежит турбулентному перемешиванию, и этот вывод полностью соответствует действительно наблюдаемым значениям коэффициента турбулентного обмена и ходу температуры воды.

При одинаковой интенсивности турбулентного обмена максимум температуры воды выражен более резко в мелководных водохранилищах, а при равных глубинах — в сильно турбулизированных водохранилищах. С увеличением глубины или уменьшением интенсивности турбулентного обмена процесс повышения температуры воды становится замедленным. В глубоководных или слабо турбулизированных водохранилищах максимум не достигается в течение зимнего периода, а идет лишь постепенно затухающий процесс нагрева водных масс за счет теплозапасов ложа.

В качестве примера на использование формулы (11) в практических целях выполнен расчет хода температуры воды водохранилища на двух горизонтах, а именно: $z = 50$ см (т. е. температуры придонного слоя воды) и $z = 0{,}6l$ при следующих значениях параметров: $c_1 = 1$ кал/г·град; $\rho_1 = 1$ г/см^3; $c_2\rho_2 = 0{,}40$ кал/град·см^3; $k_1 = 4 \cdot 10^{-2}$ см^2/сек; $k_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ см^2/сек; $l = 400$ см. Начальное распределение температуры в грунте вычислено по данным наблюдений за ходом температуры придонного слоя воды по методу ([1]).

При расчете по формуле (11) оказалось возможным для моментов времени, близких к начальному, ограничиться одними первыми членами рядов, а для всего последующего хода — двумя первыми членами. Из вычислений следует, что изменение температуры воды на глубине $z = 0{,}6l$ составляет 0,48°, а максимальная температура, равная 0,83°, наблюдается через 25 сут. после ледостава. В придонном слое изменение температуры равно 1,17°, а максимальное значение ее 1,52°.

Проведенные расчеты и анализ решения (11) показывают, что оно хорошо описывает процесс формирования зимнего хода температуры воды и дает удовлетворительное согласие с данными экспериментальных наблюдений на различных водоемах ([2]).

В заключение выпишем решение для средней по вертикали температуры воды, которая наиболее часто используется в инженерных расчетах. Полагая для сокращения записи $\theta = 0$, для средней по вертикали температуры воды будем иметь выражение

$$\bar{t}_1(\tau) = \frac{1-\beta}{2}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta^n\int_0^{\infty}\left\{2\,\mathrm{erf}\left(\frac{(2n+1)\,l\sqrt{k_2}+\eta\sqrt{k_1}}{2\sqrt{k_1k_2\tau}}\right)-\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{erf}\left(\frac{2\,ln\sqrt{k_2}+\eta\sqrt{k_1}}{2\sqrt{k_1k_2\tau}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{2l\,(n+1)\sqrt{k_2}+\eta\sqrt{k_1}}{2\sqrt{k_1k_2\tau}}\right)\right\}f(\eta)\,d\eta. \qquad (12)$$

Предположение $\theta = 0$ не оказывает существенного влияния на формирование температурного поля воды, так как теплозапас воды к моменту установления ледяного покрова очень мал и быстро восстанавливается в процессе нагрева воды после ледостава.

Ряды в решении (12) достаточно быстро сходятся, особенно для моментов времени, близких к начальному, так что можно ограничиться одними первыми членами. С увеличением расчетного периода необходимо учитывать и последующие члены рядов, чтобы получить с желаемой точностью ход средней по вертикали температуры воды.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Колесников, ДАН, **92**, № 1 (1953). [2] С. Н. Крицкий, М. Ф. Менкель, К. И. Россинский, Зимний термический режим водохранилищ, рек и каналов, 1947.