Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 5

ФИЗИКА

Ю. М. ШИРОКОВ

О НОВОМ КЛАССЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком Д. В. Скобельцыным 14 XII 1953)

Задача об исследовании возможных релятивистских уравнений для элементарных частиц обычно ставится следующим образом: рассматриваются возможные уравнения типа

$$\frac{1}{i} L_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} + \varkappa \Psi = 0, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — константа; L_μ — матричные операторы, действующие на внутренние переменные частицы; $c = h = 1$; греческие индексы пробегают значения 1—4. Для того чтобы уравнение (1) было релятивистски инвариантным, достаточно выполнения соотношений (см., например, ([1]))

$$[S_{\mu\nu},\ S_{\lambda\sigma}]_- = i\,(\delta_{\mu\sigma} S_{\lambda\nu} + \delta_{\mu\lambda} S_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma} S_{\mu\lambda} + \delta_{\lambda\nu} S_{\sigma\mu}), \tag{2}$$

$$[S_{\mu\nu},\ L_\lambda]_- = i\,(L_\nu \delta_{\mu\lambda} - L_\mu \delta_{\nu\lambda}). \tag{3}$$

Здесь квадратные скобки с минусом везде обозначают коммутатор $[a,\ b]_- = ab - ba$; $S_{\mu\nu}$ — матричный оператор, действующий на внутренние переменные волновой функции. При бесконечно малом четырехмерном повороте

$$x_\mu \to x_\mu - \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu, \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}, \quad |\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{4}$$

этим оператором определяется преобразование волновой функции

$$\Psi(x) \to \Psi(x_\mu - \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu) + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S_{\mu\nu} \Psi(x_\lambda - \varepsilon_{\lambda\sigma} x_\sigma). \tag{5}$$

Исследование возможных релятивистски инвариантных уравнений сводится, таким образом, к отысканию всех $S_{\mu\nu}$ и L_μ, удовлетворяющих соотношениям (2), (3). Наиболее полное исследование этого вопроса было проведено И. М. Гельфандом и А. М. Ягломом в ([1]), где, в частности, были найдены все конечномерные нераспадающиеся релятивистские уравнения этого типа.

Однако соотношения (2), (3) достаточны, но не необходимы для релятивистской инвариантности уравнения для элементарной частицы. Чтобы уяснить это, разложим правую часть (5) в ряд Тэйлора с точностью до первого порядка по $\varepsilon_{\mu\nu}$. Получим

$$\Psi(x) \to \Psi(x) - \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_\mu} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S_{\mu\nu} \Psi(x) = \Psi(x) + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M_{\mu\nu} \Psi(x), \tag{6}$$

где $M_{\mu\nu} = l_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$, $\quad l_{\mu\nu} = \frac{1}{i} x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{1}{i} x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

Оператор $M_{\mu\nu}$ определяет собой полное изменение волновой функции при бесконечно малом повороте и поэтому является оператором полного момента количества движения частицы. Из (6) следует, что необходимым и достаточным для инвариантности относительно четырехмерных поворотов является выполнение соотношений типа (2) не для $S_{\mu\nu}$, а для $M_{\mu\nu}$:

$$[M_{\mu\nu},\ M_{\lambda\sigma}]_- = i\,(\delta_{\mu\sigma}M_{\lambda\nu} + \delta_{\mu\lambda}M_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\lambda} + \delta_{\lambda\nu}M_{\sigma\mu}). \tag{7}$$

(7) совместно с известными соотношениями (см., например, [3])

$$[M_{\mu\nu},\ p_\lambda]_- = i\,(p_\nu\delta_{\mu\lambda} - p_\mu\delta_{\nu\lambda}), \quad [p_\mu,\ p_\nu]_- = 0 \tag{8}$$

определяют собой представления полной группы Лоренца, состоящей из трансляций и четырехмерных поворотов, и являются не только достаточными, но и необходимыми условиями релятивистской инвариантности любого квантового уравнения, в том числе и уравнения для элементарной частицы. В (8) p_μ — оператор 4-импульса $p_\mu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

(2) получается из (7) как частный случай при выполнении дополнительного условия

$$[l_{\mu\nu},\ S_{\lambda\sigma}]_- = 0. \tag{9}$$

Условие (9) канонически неинвариантно и поэтому вряд ли может иметь физический смысл. Отказ от условия (9) дает возможность получать новые релятивистски инвариантные уравнения, не содержащиеся в схеме Гельфанда и Яглома. Одним из таких уравнений является уравнение (3.24) в [2].

Представляет интерес следующий класс конечномерных уравнений нового типа. Зададим оператор $M_{\mu\nu}$ в виде (здесь и дальше используется импульсное представление):

$$\mathbf{M} = -i\left[\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right] + \mathbf{S}, \tag{10}$$

$$\mathbf{N} = i\left(E\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} + \mathbf{p}\frac{\partial}{\partial E}\right) - \frac{[\mathbf{Sp}]}{E + \sqrt{E^2 + p^2}}, \tag{11}$$

где $M_1 = M_{23}$ и т. д.; $N_1 = \frac{1}{i}M_{14}$ и т. д. $E = \frac{1}{i}p_4$; квадратные скобки обозначают векторное произведение; $\mathbf{S}$ — трехмерный матричный псевдовектор, компоненты которого удовлетворяют известным перестановочным соотношениям для компонент трехмерного момента количества движения:

$$[S_1,\ S_2]_- = iS_3 \text{ и т. д.} \tag{12}$$

При помощи (12) нетрудно проверить, что соотношения (7), (8) выполняются при подстановке в них $M_{\mu\nu}$ в виде (10), (11), что указывает на релятивистскую инвариантность выбранного представления. Инвариантность по отношению к отражениям обеспечивается псевдовекторностью $\mathbf{S}$ и наличием векторного произведения $[\mathbf{Sp}]$ в (11). Соответствующее уравнение для частицы можно выбрать в простейшем виде

$$(\Box - \varkappa^2)\,\Psi = 0. \tag{13}$$

Волновая функция Ψ будет матрицей, преобразующейся при бесконечно малом преобразовании Лоренца по (6) с $M_{\mu\nu}$ из (10), (11). Волновая функция не является ни спинором, ни тензором. Число компонент Ψ определяется числом компонент неприводимого представления группы трехмерных вращений (12) и равно $2s+1$, где s — целое или полуцелое число. Из (10) видно, что s равно спину частицы, а $2s+1$ компонент волновой функции соответствуют возможным ориентациям этого спина.

Основные отличия уравнений нового типа от уравнений схемы Гельфанда и Яглома заключаются в следующем. Во-первых, число компонент волновой функции для частицы спина s в новой схеме равно $2s+1$, а в старой, как правило, больше, чем $2s+1$. Во-вторых, в новой схеме вторичное квантование тривиально для частицы любого спина, а в старой наталкивается на серьезные затруднения при высших полуцелых спинах. В-третьих, в новой схеме, в отличие от старой, для частицы полуцелого спина не является обязательным наличие античастицы. Существенной трудностью новой схемы является вопрос о введении взаимодействия с внешним полем.

Особый интерес представляют частицы нового типа спина $^1/_2$. В этом случае в (10), (11) следует положить $\mathbf{S} = \vec{\sigma}/2$, где $\vec{\sigma}$ — вектор, составленный из матриц Паули. Соответствующее двухкомпонентное уравнение, инвариантное по отношению к четырехмерным вращениям, трансляциям и отражениям, описывает частицу спина $^1/_2$ с конечной массой покоя без состояний с отрицательной энергией, т. е. без античастицы.

В связи с этим приобретает остроту вопрос о существовании антинуклонов и о том, какому уравнению подчиняются нуклоны. Если отсутствие антинуклонов будет установлено экспериментально, то нуклоны следует описывать уравнением нового типа. Если же антинуклоны будут открыты, то вопрос о том, какому уравнению подчиняются нуклоны, останется открытым, так как в уравнении нового типа существование античастиц хотя и не обязательно, но возможно.

Пользуюсь случаем выразить благодарность И. С. Шапиро и А. М. Яглому за обсуждение результатов работы.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, ЖЭТФ, **18**, 703 (1948). [2] Ю. М. Широков, ЖЭТФ, **21**, 748 (1951). [3] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys., **21**, 392 (1949).