Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 5

ФИЗИКА

Л. Д. РОЗЕНБЕРГ

ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛУЧЕНИЯ НАИБОЛЬШЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ УЛЬТРАЗВУКА

(Представлено академиком Н. Н. Андреевым 14 XII 1953)

1. Звуковое давление и колебательная скорость в центре дифракционного (фокального) пятна, образованного сходящимся сферическим осесимметричным анаберрационным фронтом, равны с точностью до фазового множителя [1]:

$$p_f = kfp_0 \int_0^{\alpha_m} \Phi(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha, \tag{1}$$

$$v_f = kfv_0 \int_0^{\alpha_m} \Phi(\alpha) \cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha, \tag{2}$$

где p_f и v_f — соответственно, давление и скорость в центре фокального пятна; p_0 и v_0 — давление и скорость на поверхности волнового фронта радиуса f при $\alpha = 0$ (по оси); $\Phi(\alpha)$ — функция распределения амплитуд по поверхности фронта; α — угловая координата участка волнового фронта (см. рис. 1); α_m — угол раскрытия фронта; k — волновое число.

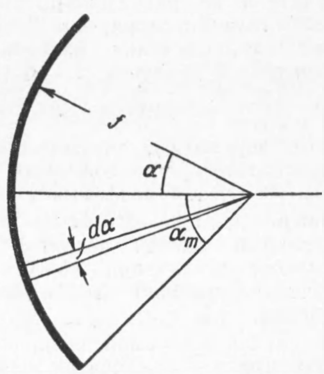

Рис. 1

Пределом применимости выражений (1) и (2) является условие:

$$f/\lambda \gg 1. \tag{3}$$

Очевидно, что величины p_f и v_f будут зависеть от вида функции распределения $\Phi(\alpha)$. Найдем функции распределения, дающие максимум интегралов (1) и (2) при условии постоянства мощности всего волнового фронта, равной, при соблюдении условия (3),

$$W = 2\pi f^2 \frac{p_0^2}{z} \int_0^{\alpha_m} \Phi^2(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha, \tag{4}$$

где z — волновое сопротивление среды.

Задача о нахождении функций $\Phi(\alpha)_{\alpha_m}$, приводящих к максимуму интегралов $\int_0^{\alpha_m} \Phi(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha$ и $\int_0^{\alpha_m} \Phi(\alpha) \cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha$ при сохранении постоянства интеграла $\int\limits_0^{\alpha_m} \Phi^2(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha$, есть задача на так называемый условный экстремум. Решая ее обычными методами вариационного исчисления, найдем, что для получения наибольшего давления необходимо иметь

$$\Phi(\alpha) = \mathrm{const}, \tag{5}$$

т. е. распределение должно быть равномерным по фронту, а для получения наибольшей скорости —

$$\Phi(\alpha) = \cos\alpha. \tag{6}$$

2. Найдем теперь ту наибольшую величину звукового давления, которая получится при оптимальной функции распределения. Для выполнения условия (4) рассмотрим последовательность волновых фронтов с равномерным распределением давления p_0, с одинаковой поверхностью S, различными углами раскрытия α_m и, соответственно, различными радиусами кривизны f (фокусными расстояниями). Одинаковость поверхностей фронтов вместе с равенством давлений соответствуют равенству полных мощностей. Если обозначить $S = \pi R^2$, то

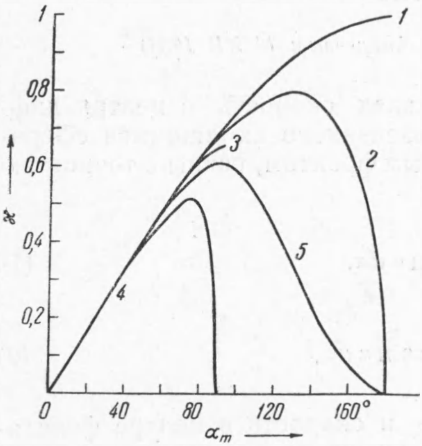

Рис. 2. *1* — $\Phi(\alpha) = 1$ — вогнутый излучатель из радиально-поляризованного титаната бария, оптимальный фронт для получения наибольшей концентрации давления; *2* — $\Phi(\alpha) = \dfrac{2}{1+\cos\alpha}$ — вогнутое параболическое зеркало [1], двухзеркальный концентратор, предложенный автором [5], считая коэффициент отражения равным 1; *3*—$\Phi(\alpha) = \cos^{1/2}\alpha$ — предельный случай вогнутой собирающей линзы при $n = 0$, считая, что ее прозрачность идеальна [3]; *4* — $\Phi(\alpha) = \cos^{-3/2}\alpha$ — предельный случай выпуклой собирающей линзы при $n = \infty$, считая, что ее прозрачность идеальна [4]; *5* — $\Phi(\alpha) = \cos\alpha$ — оптимальный фронт для получения наибольшей концентрации скорости; с некоторым приближением — вогнутый кварцевый или аксиально-поляризованный излучатель. В случаях *2*, *3* и *4* предполагается, что на концентратор падает плоская волна

$$f = \frac{R}{2\sin(\alpha_m/2)},$$

$$p_f = p_0 k \frac{R}{2\sin(\alpha_m/2)} \int\limits_0^{\alpha_m} \sin\alpha\, d\alpha =$$

$$= p_0 k R \sin\frac{\alpha_m}{2}.$$

Последнее выражение монотонно возрастает с увеличением угла α_m и при наибольшем значении $\alpha_m = \pi$ обращается в

$$p_f = p_0 k R.$$

Так как p_f / p_0, по определению, есть коэффициент усиления системы по давлению K_p, то максимально возможный коэффициент усиления, который можно получить от волнового фронта с равномерным распределением энергии на поверхности $S = \pi R^2$, равен

$$K_{p\max} = kR. \tag{8}$$

Интересно отметить, что это выражение совпадает с так называемым коэффициентом осевой концентрации плоского поршневого излучателя радиуса R, который при $R \gg \lambda$, как известно, равен kR [2]. Разница заключается лишь в том, что у плоского фронта такой коэффициент концентрации может быть реализован на большем (строго говоря, на бесконечно большом) расстоянии от излучателя, тогда как в случае сферического фронта он имеет место на сравнительно малом расстоянии f.

3. Естественно оценивать усиление, даваемое рассматриваемой системой, относя его к максимальному значению, которое может быть реализовано. Для нашего примера с равномерным распределением, что может быть реализовано применением вогнутого излучателя, например из титаната бария с радиальной поляризацией, из (7) и (8) сразу получается

$$\frac{K_p}{K_{p\max}} = \frac{K_p}{kR} = \sin\frac{\alpha_m}{2}. \tag{9}$$

Назовем это отношение фактором фокусирования давления и будем обозначать его в дальнейшем через $\varkappa$. Фактор фокусирования зависит от угла раскрытия, причем вид этой зависимости определяется функцией распределения. Кривая, соответствующая выражению (9), изображена линией *1* на рис. 2. Напомним, что R — радиус эквивалентной поверхности фронта. Установим теперь, что же следует понимать под R в том случае, когда энергия распределена по фронту неравномерно.

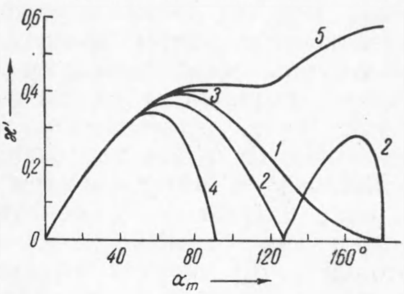

Рис. 3

Полная мощность фронта будет (4):

$$W = 2\pi f^2 \frac{p_0^2}{z} \int_0^{\alpha_m} \Phi^2(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha.$$

Нетрудно видеть, что величина R должна определяться соотношением

$$W = \pi R^2 \frac{p_0^2}{z},$$

т. е. R — радиус эквивалентного круга, на поверхности которого интенсивность равна p_0^2/z, а полная мощность W. Отсюда

$$R = f\sqrt{2\int_0^{\alpha_m} \Phi^2(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha}. \tag{10}$$

4. На рис. 2 даны для сравнения зависимости фокусирующего фактора от угла раскрытия для некоторых типичных концентрирующих систем.

Как видно из рис. 2, все кривые совпадают до 50—60° и лишь при больших углах раскрытия начинают расходиться.

5. Аналогично фактору фокусирования давления можно ввести понятие фактора фокусирования скорости $\varkappa'$. Хотя в случае скорости величина kR не имеет такого реального физического смысла, как для давления, мы все же считаем возможным определить фактор фокусирования скорости как

$$\varkappa' = \frac{Kv}{kR}. \tag{11}$$

На рис. 3 приведены для сравнения зависимости $\varkappa'$ от угла раскрытия для тех же случаев, что и на рис. 2. Кривая *2* при 127°

переходит через нуль и меняет знак [1], что соответствует изменению направления скорости в центре фокального пятна; на рисунке эта ветвь кривой изображена для удобства в положительной области.

Поступило
2 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Розенберг, Звуковые фокусирующие системы, М.—Л., 1949. [2] И. Г. Дрейзен, Электроакустика, 2, М.—Л., 1940. [3] Л. Д. Розенберг, Тр. Акуст. ком., 5, 114 (1950). [4] Л. Д. Розенберг, Тр. Акуст. ком., 6, 114 (1951). [5] Л. Д. Розенберг, ДАН, 91, 1091 (1953).