Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 5

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР Г. А. ГРИНБЕРГ

О МАГНИТНОМ ПОЛЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В ПОЛОСТЯХ ИЛИ КАНАЛАХ ВНУТРИ ЖЕЛЕЗА, ПРОНИЦАЕМОСТЬ КОТОРОГО МОЖЕТ СЧИТАТЬСЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ

1. Целью настоящей заметки является доказательство некоторых, как нам кажется, новых и не лишенных известного интереса теорем, относящихся к нахождению магнитного поля стационарных токов при наличии в окружающей среде тел с проницаемостью, которая может считаться бесконечно большой, и указание в связи с этим на ряд нечеткостей, неточностей и даже прямых ошибок, имеющихся в этом, казалось бы классически ясном, вопросе у целого ряда даже вполне компетентных авторов (например, у Зоммерфельда ([1]), Смайта ([2]) и др.).

2. Рассмотрим в первую очередь вопрос о магнитном поле бесконечного прямолинейного тока $\mathbf{I}$, помещенного в неограниченный цилиндрический канал с сечением произвольной формы и с осью, параллельной току, проделанный внутри неограниченно простирающейся во все стороны массы вещества с проницаемостью $\mu=\infty$, тогда как в канале $\mu=\mu_1=\mathrm{const}\neq\infty$ (плоская задача).

Направим ось z прямоугольной системы координат параллельно току $\mathbf{I}$. Полное магнитное поле $\mathbf{H}$ в каждой точке пространства можно представить как сумму $\mathbf{H}=\mathbf{H}^0+\mathbf{H}_m$ первичного поля $\mathbf{H}^0$, создаваемого током $\mathbf{I}$ в пустоте *

$$\mathbf{H}^0=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}^0,\quad \mathbf{A}^0=-\frac{2\mathbf{I}}{c}\ln R\equiv A^0\frac{\mathbf{I}}{I},\quad R=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},\tag{1}$$

(где a и b — координаты тока $\mathbf{I}$ на плоскости XOY, а x, y — координаты точки наблюдения), и вторичного поля $\mathbf{H}_m=-\mathrm{grad}\,\varphi$, происходящего от выделившихся на поверхности раздела сред магнитных поляризационных плотностей.

Обозначим через $\mathbf{s}^0$ и $\mathbf{n}^0$ орты касательной и нормали к контуру (s) сечения канала плоскостью XOY, причем будем считать, что орты $\mathbf{n}^0$, $\mathbf{s}^0$ и $\mathbf{i}_z\parallel\mathbf{I}$ составляют правую систему. Величинам, относящимся к области внутри этого контура, будем приписывать индекс (1), а к области вне контура — индекс (2). Условие непрерывности нормальных к поверхности составляющих магнитной индукции в обеих средах требует, поскольку μ_1 конечна, а $\mu_2=\infty$, чтобы на контуре (s) выполнялось условие

$$H_n^{(2)}=H_n^0-\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial n}=0.\tag{2}$$

Замечая, что φ является вещественной частью некоторой функции

* Пользуемся гауссовой системой единиц.

$W = \varphi + i\psi$ * комплексной переменной $t = x + iy$, причем $\partial\varphi/\partial n = \partial\psi/\partial s$, и что, согласно (1), $H_n^0 = \partial A^0/\partial s$, можем переписать (2) таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial s}(A^0 - \psi^{(2)}) = 0, \tag{3}$$

так что разность $u^{(2)} = A^0 - \psi^{(2)}$ должна сохранять на контуре (s) некоторое постоянное значение, скажем M.

Далее, $u^{(2)}$ должна удовлетворять уравнению** $\partial^{(2)}u^2/\partial x^2 + \partial^2 u^{(2)}/\partial y^2 = 0$, поскольку уравнениям такого типа удовлетворяют во второй среде в отдельности A^0 и $\psi^{(2)}$, а потому функция $u^{(2)}$ должна совпадать с одним из решений такого уравнения Лапласа, принимающих на контуре постоянное значение, равное M.

Для окончательного определения $u^{(2)}$ достаточно теперь заметить, что функция $\psi^{(2)}$ должна быть однозначной в среде (2) и на бесконечности обращаться в нуль, по крайней мере, как $1/r$, где r — расстояние до бесконечно удаленной точки от начала координат***. Поэтому должно быть

$$(\psi^{(2)})_{r\to\infty} = (A^0 - u^{(2)})_{r\to\infty} = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

а так как (ср. (1)) $(A^0)_{r\to\infty} = -\frac{2I}{c}\ln r + O\left(\frac{1}{r}\right)$, то $u^{(2)}$ — это то решение уравнения Лапласа, которое принимает на контуре (s) постоянное значение, а на бесконечности ведет себя как электростатический потенциал находящейся в пустоте однородно наэлектризованной по длине бесконечной прямолинейной нити с зарядом $e = I/c$ на единицу длины. Это показывает, что $u^{(2)}$ полностью совпадает с решением электростатической задачи для внешней по отношению к контуру (s) области, причем в окружающей этот контур среде (пустоте) нет никаких зарядов, а суммарный заряд на контуре области равен I/c. Тем самым полностью определилась функция $\psi^{(2)} = A^0 - u^{(2)}$ в каждой точке второй среды, а стало быть, из уравнений $\partial\varphi^{(2)}/\partial x = \partial\psi^{(2)}/\partial y$, $\partial\varphi^{(2)}/\partial y = -\partial\psi^{(2)}/\partial x$ и из условия $(\varphi^{(2)})_{r\to\infty} \to 0$ однозначно определяется теперь и потенциал $\varphi^{(2)}$ в каждой точке второй среды, включая и самый контур (s). Но раз решением внешней по отношению к (s) задачи найдено значение $\varphi^{(2)} = (\varphi^{(2)})_{(s)}$ на самом контуре, то, в силу непрерывности потенциала поляризационных зарядов при проходе через контур, должно быть $(\varphi^{(1)})_{(s)} = (\varphi^{(2)})_{(s)}$, и, стало быть, для окончательного решения задачи — для нахождения магнитного поля в области (1) внутри канала — остается решить уравнение $\Delta\varphi^{(1)} = \partial^2\varphi^{(1)}/\partial x^2 + \partial^2\varphi^{(1)}/\partial y^2 = 0$ для внутренней по отношению к (s) области, пользуясь уже известным граничным значением $(\varphi^{(1)})_{(s)}$ на контуре области.

Таким образом, для решения рассматриваемой задачи нужно сперва решить некоторую задачу Дирихле для внешней по отношению к (s) области, а затем вторую задачу Дирихле для внутренней области,

---

* ψ можно рассматривать как единственную, в данном случае z-ю, компоненту вектор-потенциала поля, создаваемого поляризационными плотностями на поверхности раздела сред (1) и (2).

** В среде (2), конечно.

*** Однозначность ее следует из того, что, поскольку сумма поляризационных магнитных «масс» на (s) равна нулю, то равен нулю и интеграл $\int_{(s)} \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial n} ds = \int_{(s)} \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial s} ds$. Из этого же следует, что на бесконечности φ имеет вид $\varphi = (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)/r + O(1/r^2)$, где α и β — постоянные, θ — полярный угол, а сопряженная функция $\psi = (-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)/r + O(1/r^2)$.

Если форма контура такова, что известны функции, конформно отображающие на круг как внешнюю, так и внутреннюю по отношению к нему область, то искомое решение может быть найдено при помощи двух последовательных конформных отображений.

3. Найдем касательную к контуру (s) составляющую H_t полного поля, причем, так как она непрерывна при проходе через контур, то можно исходить при ее вычислении из найденного для области (2) решения.

Получаем на контуре:

$$(H_t)_{(s)} = [H_t^0 + (H_m^{(2)})_t]_{(s)} = -\left[\frac{\partial A^0}{\partial n} + \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial s}\right]_{(s)} =$$

$$= -\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(A^0 - \psi^{(2)}\right)\right]_{(s)} = -\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\right)_{(s)}. \qquad (4)$$

Так как $-(\partial u^{(2)} / \partial n)_{(s)} = E_n = 4\pi\sigma$, где E_n — нормальная к (s) составляющая электростатического поля, определяемого потенциалом $u^{(2)}$, а σ — соответствующая поверхностная плотность электрического заряда на поверхности (s), то получаем следующую теорему:

Касательная составляющая H_t магнитного поля на поверхности канала не зависит от местонахождения тока I внутри канала и равна по величине электростатическому полю $E = E_n = 4\pi\sigma$ в соответствующей точке поверхности проводящего цилиндра, совпадающего по форме с каналом, находящегося в пустоте и несущего на единице длины заряд $e = I/c$ *.

В частности, для канала с круговым сечением радиуса a $H_t = 2e/a = 2I/ac$ — известный результат, легко получающийся в этом случае при $\mu_2 = \infty$ из общего решения аналогичной задачи (в полярных координатах) для двух сред с любыми значениями μ_1 и μ_2.

Для канала эллиптического сечения с полуосями a и b сразу получаем из решения соответствующей электростатической задачи, что $H_t = \frac{2I}{abc} p$, где p — длина перпендикуляра, опущенного на касательную к эллипсу в рассматриваемой точке из его центра.

В случае прямоугольного сечения канала H_t должна обращаться в бесконечность в углах, поскольку там становится бесконечным соответствующее электростатическое поле. Вообще, при наличии на контуре угловых точек H_t должна обращаться в них в бесконечность, если угол — выступающий наружу, и в нуль — если он входящий.

Следствие 1. До сих пор мы считали, что первичное поле $\mathbf{H}^0$ создается одним линейным током I, параллельным оси канала. Но так как H_t на поверхности канала оказалась не зависящей от местоположения тока внутри его, то доказанная теорема остается верной и в случае любой системы параллельных оси канала токов, если только под I понимать теперь их сумму. Если, в частности, эта сумма равна нулю, то тогда везде на контуре $H_t = 0$, и силовые линии оканчиваются на стенках канала перпендикулярно к ним **.

---

* Заметим, что из (4) следует при этом, что $\int\limits_{(s)} H_t\, ds = -\int\limits_{(s)} \frac{du^{(2)}}{dn}\, ds = 4\pi e = \frac{4\pi I}{c}$, как и должно быть.

** Отметим, что во многих курсах и монографиях перпендикулярность силовых линий к стенкам тел с $\mu = \infty$ выводится как прямое и безоговорочное следствие из закона преломления силовых линий на границе раздела двух сред (см., например, ([1]), стр. 91 и ([2]), стр. 287, п. 7.25). У последнего автора даются неверные решения задач о кольцевом токе в кольцевом канале (([2]), п. 7.31, стр. 293—297, теория магнитного поля в броневом трансформаторе) и о прямолинейном токе в прямоугольном канале (([2]), стр. 303, п. 33), полученные на основе требования об обращении в нуль касательной составляющей полного магнитного поля на стенках каналов. Заметим, что из формулы $\operatorname{tg}\alpha_1/\mu_1 = \operatorname{tg}\alpha_2/\mu_2$ следует, что $\alpha_1 = 0$ при $\mu_2 = \infty$ лишь если $\operatorname{tg}\alpha_2 = H_t/H_n^{(2)} \neq \infty$, тогда как если $(H_t)_{\mu_2\to\infty} \neq 0$, то $\operatorname{tg}\alpha_2 \to \infty$ из-за $H_n^{(2)} \to 0$.

Следствие 2. Если при данном токе I внутри канала периметр канала становится бесконечно большим (например, канал превращается в щелевой зазор, уходящий концами на бесконечность), то H_t обращается в нуль, поскольку при этом стремится к нулю плотность заряда σ в соответствующей электростатической задаче.

4. Мы рассмотрели случай одного канала в безграничной среде с $\mu_2 = \infty$. Если имеется ряд параллельных каналов или если такая среда заполняет лишь ограниченную область пространства, то все приведенные рассуждения остаются в силе *, если под A^0 понимать величину вектор-потенциала в пустоте всех первичных токов, а под φ и ψ — магнитный потенциал и сопряженную ему функцию, происходящие от выделившихся на всех поверхностях раздела магнитных поляризационных плотностей. Для нахождения решения должно опять служить уравнение $\Delta u^{(2)} = 0$, где $u^{(2)} = A^0 - \psi^{(2)}$, и условия, что $u^{(2)}$ должно на каждой поверхности раздела принимать какое-то свое постоянное значение (различное, вообще говоря, на разных поверхностях), тогда как потенциал φ должен быть непрерывен при проходе через эти поверхности, причем как φ, так и ψ должны обращаться в нуль на бесконечности. Для полного определения всех входящих в решение постоянных нужно еще использовать условие, что циркуляция полного поля $\mathbf{H}$ по контуру сечения каждого канала должна равняться $4\pi I_к/c$, где $I_к$ — полный ток в этом канале.

5. Мы рассмотрели плоскую задачу магнитостатики. В случае пространственных полей для решения задачи следует тоже разложить полное магнитное поле в каждой точке пространства на первичное поле $\mathbf{H}^0$ заданных токов в пустоте и на вторичное $\mathbf{H}_m = -\operatorname{grad}\varphi$, потенциал которого удовлетворяет уравнению Лапласа, обращается в нуль на бесконечности и непрерывен при проходе через поверхности раздела сред. Вторым граничным условием служит на поверхности среды с $\mu = \infty$ обращение в нуль нормальной к ней составляющей полного магнитного поля у поверхности внутри этой среды. В случае кольцевых каналов и токов, обладающих симметрией вращения, задача несколько упрощается и приводится к нахождению единственной компоненты $A_\theta = A$ вектор-потенциала полного поля в цилиндрических координатах ρ, θ, z с осью, совпадающей с осью вращения, причем величина (ρA) должна принимать постоянное значение у поверхности раздела внутри среды с $\mu = \infty$.

Поступило
14 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Sommerfeld. Electrodynamics, N. Y., 1952. [2] W. Smythe, Static and Dynamic Electricity, 2-d Ed., 1950. (International Series in Pure and Applied Physics).

* Для плоской задачи.