

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю. А. ЯППА

**«ШРЕДИНГЕРОВСКАЯ ФОРМА» РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНВАРИАНТНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком В. А. Фоком 10 XII 1953)

Релятивистски инвариантные уравнения для элементарных частиц изучаются обычно в виде (1):

$$(L^\mu \partial_\mu + \kappa) \psi = 0^*, \quad (1)$$

где матрицы L^μ удовлетворяют условию

$$S^{-1} L^\mu S t_\mu^\nu = L^\nu. \quad (2)$$

В наиболее хорошо изученных частных случаях частиц, обладающих спином $1/2$, 0 и 1, уравнение (1) может быть записано, благодаря свойствам матриц L^μ , выражаемым перестановочными соотношениями Дирака и Дэффина — Кеммера, в виде:

$$\{\partial_\mu + F_\mu^\nu \partial_\nu + \kappa G_\mu\} \psi = 0, \quad (3)$$

где операторы F_μ^ν и G_μ составлены из матриц L^μ таким образом, что член $F_\mu^\nu \partial_\nu$ не содержит производной по x^μ . Так например, в случае Дэффина — Кеммера уравнение (3) имеет вид:

$$\{\partial_\mu + (L_\mu L^\nu - L^\nu L_\mu) \partial_\nu + \kappa L_\mu\} \psi = 0. \quad (4)$$

Для $\mu = 0$ уравнение (3) принимает вид уравнения Шредингера:

$$\partial_0 \psi = H \psi. \quad (5)$$

С этим свойством уравнения (1) в указанных случаях связаны многие существенные черты физического описания: 1) возможность релятивистски ковариантного определения оператора Гамильтона H , который, с одной стороны, позволял бы найти закон изменения волновой функции во времени при помощи уравнения (5), а с другой стороны, входил бы в формулу для среднего значения плотности энергии поля:

$$-T_{00} = \frac{1}{2i} \{(\psi, H\psi) - (H\psi, \psi)\} \quad (6)$$

(см. (1)); 2) возможность использования классической аналогии для обоснования способа введения взаимодействия частицы с электромагнитным полем при помощи замены:

$$\partial_\mu \rightarrow \Pi_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu^{**}, \quad (7)$$

а также 3) свойства нерелятивистского и полуклассического прибли-

* В дальнейшем удобно суммировать по значкам, которые встречаются дважды — вверху и внизу, несмотря на то, что матрицы L^μ отличаются по закону преобразования от тензорных величин.

** Обоснование такой замены при помощи требования градиентной инвариантности при отсутствии классической аналогии носит более формальный характер.

жений. Вследствие этого приобретает интерес вопрос о том, в каких случаях общее уравнение Гельфанда и Яглома вида (1) можно записать в «шредингеровском виде» (3) эквивалентным образом, т. е. так, чтобы каждое решение уравнения (1) было решением уравнения (3) и обратно. «Шредингеровский вид» уравнения (1) может быть определен, очевидно, либо в форме (3), при условии

$$F_{\mu\mu} = 0^* \quad (8)$$

(по μ здесь, а также далее, в формуле (10), суммирование не производится), либо же в форме:

$$\{H_{\mu}^{\nu}\partial_{\nu} + \kappa G_{\mu}\} \psi = 0 \quad (9)$$

при условии

$$H_{\mu\mu} = 1^{**}. \quad (10)$$

Наша задача здесь — найти те условия, которым должно удовлетворять уравнение (1), если оно может быть записано в эквивалентном шредингеровском виде (3) или (9) (т. е. найти необходимые условия возможности такой записи). Можно легко показать, что уравнение (2) (соотв. (9)) будет релятивистски инвариантным, если оператор $F^{\mu\nu}$ (соотв. $H^{\mu\nu}$) удовлетворяет условию

$$S^{-1}F^{\mu\nu}St_{\mu}^{\rho}t_{\nu}^{\sigma} = F^{\rho\sigma} \quad (11)$$

и, одновременно, оператор G^{μ} — условию

$$S^{-1}G^{\mu}St_{\mu}^{\rho} = G^{\rho}. \quad (12)$$

Из (2), (11) и (12) можно видеть, что $F^{\mu\nu}$ должен включать в себя только попарные произведения матриц, удовлетворяющих условию (2), а G^{μ} — только первые степени этих матриц. Так как требование (8) должно сохраняться при преобразованиях Лоренца, $F^{\mu\nu}$, по (11), должен удовлетворять также условию

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (\mu \neq \nu). \quad (13)$$

Принимая во внимание (13) и дифференцируя каждое из уравнений (3) по x^{μ} (мы всегда можем считать, что ψ , по крайней мере, дважды дифференцируема), получим после сложения:

$$\{\partial_{\mu}\partial^{\mu} + \kappa G^{\mu}\partial_{\mu}\} \psi = 0. \quad (14)$$

Для того чтобы найти общий вид G^{μ} , следует учесть, что если в исходное уравнение (1) входят матрицы L^{μ} , определяемые условием (2), то в результате примененного при переходе от уравнения (1) к уравнению вида (3) алгоритма в G^{μ} могут входить уже некоторые другие матрицы L^{μ} , определяемые условием

$$\mathcal{L}^{\mu} = PL^{\mu}Q, \quad (15)$$

где преобразования P и Q должны быть такими, чтобы

$$[P, S] = 0 \text{ и } [Q, S] = 0. \quad (16)$$

* При помощи формулы (11) (см. дальше) легко может быть показано, что из условия релятивистской инвариантности требования (8) вытекает, что $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ при $\mu \neq \nu$.

** Можно было бы изучить соотношение $H_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$ между величинами $H_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$, но для наших целей удобнее рассматривать эти величины в отдельности.

Например, умножение L^μ на $L_\rho L^\rho$ является таким преобразованием вида P , так как легко убедиться в том, что

$$SL_\rho L^\rho S^{-1} = L_\rho L^\rho \quad (17)$$

(см. (2)). Однако P и Q могут иметь и значительно более общий вид. Следует заметить, что матричные элементы матриц \mathcal{L}^μ могут, очевидно, отличаться от матричных элементов матриц L^μ лишь тем или иным выбором произвольных постоянных $c_{\tau\tau}$ (см. (1), формулы (3.13) и (3.14)). Таким образом,

$$G^\mu = \mathcal{L}^\mu. \quad (18)$$

При помощи уравнения (1), совершая преобразование

$$\psi \rightarrow Q\psi \quad (19)$$

и умножая слева (1) на P , мы получим новое уравнение вида

$$\{PL^\mu Q\partial_\mu + P\kappa Q\} \psi = 0, \quad (20)$$

которому также будет удовлетворять любое решение ψ уравнения (1), в чем можно убедиться, принимая во внимание, что так как матрицы \mathcal{L}^μ удовлетворяют условию (2) с тем же S , с их помощью, так же как при помощи матриц L^μ , можно построить релятивистски инвариантное уравнение, обладающее теми же свойствами, что и уравнение (1). Отсюда можно заключить, что уравнение (14) может быть записано также в виде:

$$\{\partial_\mu \partial^\mu - \kappa P\kappa Q\} \psi = 0. \quad (21)$$

Мы здесь считаем κ , вообще, произвольной матрицей, удовлетворяющей условию релятивистской инвариантности. В частности, если

$$[P, \kappa] = 0 \quad (22)$$

и матрицы \mathcal{L}^μ могут быть получены из матриц L^μ при помощи преобразования подобия

$$\mathcal{L}^\mu = PL^\mu P^{-1}, \quad (23)$$

то уравнение (21) принимает вид уравнения Клейна — Фока:

$$\{\partial_\mu \partial^\mu - \kappa^2\} \psi = 0. \quad (24)$$

Таким образом, в силу эквивалентности уравнений (1) и (3), любое дважды дифференцируемое решение уравнения (1) должно удовлетворять уравнению второго порядка вида (21). Следует заметить, что с физической точки зрения естественно потребовать, чтобы в уравнениях (1), (3) и (21) входил один и тот же параметр κ . Тогда (23), (22) и (16) представляют собой условия, которым должен удовлетворять способ, которым уравнение (3) может быть получено из уравнения (1).

Обратимся теперь к тому случаю, когда шредингеровская форма уравнения (1) определяется условиями (9) и (10). По (10) и (11) можно видеть, что (достаточно взять уравнение (3) для $\mu = 0$) должно быть:

$$S^{-1} H^{\mu\nu} S t_\mu^0 t_\nu^0 = 1, \quad (25)$$

т. е.

$$H^{\mu\nu} t_\mu^0 t_\nu^0 = 1. \quad (26)$$

Уравнение (26) можно записать также в виде

$$H^{\mu\nu} t_\mu^0 t_\nu^0 = g^{\mu\nu} t_\mu^0 t_\nu^0. \quad (27)$$

Рассмотрим теперь две возможности.

а) Пусть $H^{\mu\nu} = L^\mu L^\nu$, где L^μ — те же самые матрицы, которые входят в состав уравнения (1). Тогда можно убедиться в том, что для

выполнения (27) необходимо, чтобы матрицы L^μ удовлетворяли соотношениям перестановки

$$L^\mu L^\nu + L^\nu L^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (28)$$

и, таким образом, данный случай представляет собой случай уравнения Дирака*.

б) Пусть $H^{\mu\nu} = \Lambda^\mu \Lambda^\nu$, где Λ^μ и Λ^ν — какие-либо матрицы, определяемые соотношениями вида (15) или (23). Тогда из (27) следует, что они должны удовлетворять перестановочным соотношениям

$$\Lambda_\mu \Lambda'_\nu + \Lambda'_\nu \Lambda_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (29)$$

которые, принимая во внимание, что $\Lambda'_\nu = \Lambda_\nu^{-1}$, можно записать в виде

$$\Lambda_\mu \Lambda_\nu + \Lambda_\nu \Lambda_\mu = 2g_{\mu\nu} (\Lambda_\nu)^2. \quad (30)$$

Если же $H^{\mu\nu}$ состоит из суммы членов, определенных в б), то соответствующие аргументы относятся к каждому из членов этой суммы. Отсюда видно, что в самом общем случае, благодаря свойствам входящих в $H^{\mu\nu}$ матриц, оператор $H^{\mu\nu}$ должен удовлетворять условию $H^{\mu\nu} = -H^{\nu\mu}$ ($\nu \neq \mu$), и уравнение (9) может быть записано в виде:

$$k \neq \mu; \quad \{\partial_\mu + H_\mu^h \partial_h + G_\mu \kappa\} \psi = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) совпадает формально с уравнением (3) и, повторяя аналогичные рассуждения, можно видеть, что любое решение уравнения (1), являясь одновременно решением уравнения (31), должно быть также и решением уравнения второго порядка вида (24). В случае наличия условий (3) и (8) $F_{\mu\nu}$ должен, вообще, иметь вид $F_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^{(1)} \Lambda_\nu^{(2)} - \Lambda_\nu^{(2)} \Lambda_\mu^{(1)}$, где $\Lambda_\mu^{(1)}$ и $\Lambda_\mu^{(2)}$ определяются условием, аналогичным (15).

Таким образом, все черты физического описания, свойственные случаю Дирака, могут быть перенесены лишь на класс уравнений Гельфанда и Яглома не более широкий, чем класс таких уравнений, все решения которых удовлетворяют одновременно уравнениям второго порядка. Заметим, что это было показано выше без каких-либо ограничений в отношении представления S или вида матрицы массы покоя κ . Напомним в заключение, что в конечномерном случае решения некоторого уравнения вида (1) являются одновременно решениями уравнений вида:

$$\prod_{i=1}^n (\square - \kappa_i^2) \psi = 0, \quad (32)$$

и, следовательно, уравнения вида (32) не приводятся к шредингеровской форме в том смысле, как она определена выше (т. е., например, без включения каких-либо интегральных операторов). С отсутствием шредингеровской формы в случаях, когда имеют место уравнения выше второго порядка, как можно думать, связаны отличные от обычных для случая Дирака черты физического описания (как например, наличие ряда условий, имеющих вид условий регуляризации; см. (2)).

Поступило
17 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, ЖЭТФ, 18, 703 (1948). ² Ю. А. Яппа, ДАН, 86, 51 (1952).

* Отсюда следует, что перестановочные соотношения между матрицами Дирака можно рассматривать не только как следствие наличия уравнения второго порядка, но и как следствие существования эквивалентной уравнению (1) шредингеровской формы (9).