Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 5

МАТЕМАТИКА

С. В. ЯБЛОНСКИЙ

РЕАЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ В КЛАССЕ П-СХЕМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 7 XII 1953)

Аппарат математической логики дает способ синтеза контактного двухполюсника, и притом даже в классе параллельно-последовательных схем (*П*-схем), для любой функции, аргументы которой определены на множестве из двух значений и принимающей эти же значения. Известно [1,2], что существуют функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, требующие не менее $\frac{2^n}{n}(1-\varepsilon)$ контактов в классе всех схем и не менее чем $\frac{2^n}{\log n}(1-\varepsilon)$ контактов в классе *П*-схем (где ε — произвольное положительное число и $n > N(\varepsilon)$), причем доля подобных функций (зависящих не более чем от n аргументов) по отношению к числу всех функций стремится к 1 с ростом n.

Однако в приложениях зачастую мы имеем дело с функциями специального вида, которые допускают особо простую схемную реализацию. Один из таких случаев рассматривается в настоящей статье.

Здесь предлагается способ реализации линейной функции*

$$\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \pmod 2,$$

где $c_i = 0$ или 1 и n — произвольное целое положительное число, в классе *П*-схем. Этот способ интересен также и тем, что он позволяет с возможно наименьшим числом букв записать эквивалентность [3] через операции &, $\vee$ и —.

Так как имеется только две линейных функции, существенно зависящих от n аргументов:

$$\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$
$$\Phi'_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1,$$

причем из всякой схемы для первой функции немедленно получается схема для второй функции с тем же числом контактов и наоборот, то достаточно ограничиться рассмотрением функции

$$\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Пусть α_n — наименьшее число контактов, возможное в *П*-схеме для Φ_n. Очевидно, что

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_n \leqslant 2(\alpha_m + \alpha_p), \quad \text{где} \quad n = m + p. \qquad (*)$$

В самом деле, так как $\Phi_n(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \Phi_m(x_1, \ldots, x_m) + \Phi_p(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, то *П*-схема для Φ_n может быть получена из *П*-схем для Φ_m, $\Phi_m + 1$, Φ_p и $\Phi_p + 1$ так, как это указано на рис. 1.

---

* В литературе для этой же функции встречается также термин счетчик четности.

Исходя из соотношений (*), нетрудно получить оценку для α_n. С этой целью составим таблицу.

$$n = n_{01}$$
$$(n_{11},\ n_{12})$$
$$(n_{21},\ n_{22}),\ (n_{23},\ n_{24})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n_{l1},\ n_{l2}),\ (n_{l3},\ n_{l4}),\ \ldots,\ (n_{l,\,2^l-1},\ n_{l,\,2^l}).$$

Здесь $n_{ij} = n_{i+1,\,2j-1} + n_{i+1,2j}$ и $n_{i+1,\,2j-1} = \left[\frac{n_{ij}}{2}\right]$.

Легко видеть, что разность между любыми двумя элементами одной и той же строки не превосходит единицы. Поэтому можно считать, что в последней строке стоят единицы и, может быть, двойки.

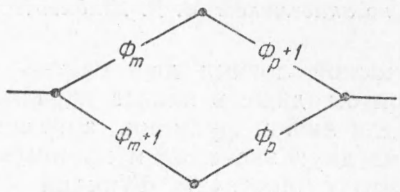

Рис. 1

Пусть $2^k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}$. Тогда из $n_{i+1,\,2j-1} = \left[\frac{n_{ij}}{2}\right]$ следует, что $l = k$. Обозначим через ρ число двоек в последней строке. Мы имеем $n = 2\rho + (2^k - \rho)$, т. е. ρ есть уклонение n от 2^k.

Принимая во внимание неравенство (*), получим

$$\alpha_n \leqslant 2^k\,[\alpha_2\rho + \alpha_1(2^k - \rho)] = 2^{2k} + 3\rho 2^k.$$

Оценим величину $\frac{\alpha_n}{n^2}$ для $2^k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}$:

$$\frac{\alpha_n}{n^2} \leqslant \frac{2^{2k} + 3\rho 2^k}{2^{2k} + 2\rho 2^k + \rho^2} = A(k,\ \rho).$$

Выражение $A(k,\ \rho)$ достигает максимума при $\rho = \frac{2^k}{3}$; отсюда

$$\frac{\alpha_n}{n^2} < \frac{9}{8} \quad \text{или} \quad \alpha_n < \frac{9}{8}n^2\,*.$$

Так как оценка не зависит от k, то это соотношение справедливо для всех n.

Между прочим, для каждой последовательности $n = 2^k + \rho$ ($k = 0, 1, \ldots$) метод дает свою оценку $\left(< \frac{9}{8}n^2\right)$. В частности, при $\rho = 0$

$$\alpha_n = \alpha_{2^k} \leqslant 2\cdot 2\alpha_{2^{k-1}} \leqslant \ldots \leqslant 2^{2k}\alpha_1 = (2^k)^2 = n^2.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
3 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Riordan, C. E. Shannon, J. Math. Phys., **21**, 2, 83 (1942). [2] C. E. Shannon, BSTJ, **28**, 1, 59 (1949). [3] С. В. Яблонский, Матем. сборн., **30** (72), 2, 329 (1952).

---

* После того как был получен результат, автор узнал, что в работе ([2]) Шеннон сообщил без доказательства, ссылаясь на Риордана, что α_n имеет порядок n^2.